

Note Technique CCT Mécanique Orbitale N° 7

Introduction au Problème à Trois Corps et Dynamique Linéarisée autour des Points de Lagrange

Auteur (*Author*) : Guillaume Collange

Comité de relecture (*Reviewers*):

Benoit MEYSSIGNAC (CNES, DCT/SB/MO)

Jean FOURCADE (CNES, DCT/SB/MO)

Introduction au Problème à Trois Corps et Dynamique Linéarisée autour des Points de Lagrange

Auteur (*Author*) : Guillaume Collange

Mots Clés (*Key Words*) : Orbites, périodicité, Lagrange, Lissajous, variétés, maintien à poste, escape direction

Résumé:

Ce document décrit la dynamique linéarisée d'un satellite à proximité des points d'Euler (L1, L2 et L3). Il y est proposé dans un premier temps une introduction au problème restreint à trois corps en utilisant les deux points de vue Lagrangien et Hamiltonien. Sur ces bases est développée ensuite l'analyse linéaire du mouvement qui donne une bonne représentation de la dynamique à proximité des points de Lagrange. Et dans un dernier temps une méthode de maintien à poste dite «escape direction method »est présentée à partir des éléments théoriques précédents.

Abstract:

This document describes the linearized dynamics of a spacecraft in the neighborhood of the colinear libration points. it is divided into three main parts. In the first part, you will find an introduction to the restricted three body problem given through two different points of view: the Lagrangian one followed by the Hamiltonian one. In the second part the linearized analysis of the dynamics is developed. It gives a consistent approach of the motion in the close vicinity of the colinear points. In the last part a classical station keeping method, the so called «escape direction method », is developed on the previous theoretical considerations.

Préambule

Cette note technique résume les aspects théoriques du travail que Guillaume Collange a réalisé sur la dynamique autour des points de Lagrange. C'était au cours d'un stage d'un an, de septembre 2003 à septembre 2004, qu'il a effectué pour moitié au Goddard Space Flight Center et pour moitié au Centre Spatial de Toulouse du CNES. Nous avons décidé de publier aujourd'hui cette note pour deux raisons. D'une part elle permet d'établir et de vulgariser un certain nombre de résultats simples liés à la dynamique autour des points de Lagrange qui prend une importance grandissante dans le domaine de la mécanique spatiale. D'autre part, elle sert de point de départ à de futures notes techniques qui, à partir de l'étude des points de Lagrange permettront de faire connaître les méthodes modernes d'analyse en mécanique spatiale et en particulier les applications de la théorie des systèmes dynamiques.

Ainsi, à la lecture de cette note, vous découvrirez deux parties distinctes à l'image des objectifs précités. La première partie jette les bases de la dynamique autour des points de Lagrange dans le chapitre 1 en exposant le problème restreint à trois corps sous ses formulations les plus étudiées aujourd'hui: Lagrangienne et Hamiltonienne. Elle se poursuit dans le chapitre 2 par l'analyse linéaire détaillée de la dynamique à proximité des points d'équilibre et de sa stabilité. L'ensemble des résultats qui y sont exposés constitue une bonne approximation de la dynamique autour des points de Lagrange et offre des méthodes simples de dimensionnement à l'usage de toutes personnes confrontées à ce type de problème. La deuxième partie quant à elle, ne présente pas de résultats mais donne un aperçu des méthodes utilisées pour l'estimation et le contrôle de la dynamique non linéaire à proximité des points de Lagrange dans le cas du transfert (chapitre 3) et dans le cas du maintien à poste (chapitre 4).

En attendant d'aller plus loin sur ce sujet, je vous souhaite une bonne lecture...

Benoit Meyssignac

Sommaire

Introduction	7
1 Le Problème à Trois Corps Restreint	8
1.1 Formulation Lagrangienne	8
1.2 Régions de Hill et surfaces de vitesse nulle	10
1.3 Les Points de Lagrange	12
1.4 Formulation Hamiltonienne	15
2 Stabilité des Points de Lagrange	17
2.1 Linéarisation des équations	17
2.2 Les points triangulaires	19
2.3 Les points collinéaires	21
2.4 Analyse géométrique (Hamilton)	25
3 Transferts	28
3.1 Matrice de Monodromie, Variétés stable et instable	28
3.2 Transfert de la Terre vers un point de Lagrange	30
3.3 Transfert entre orbites	33
4 Stratégies de maintien à poste	37
4.1 Choix de l'orbite	37
4.2 Annulation de la composante instable	38
4.3 Approche par modes de Floquet	39
4.4 Points Cibles	40
Références	41

Introduction

Cette note technique propose une introduction à la dynamique autour des points de Lagrange et les missions interplanétaires vers ces points. En 1772, Lagrange publiait *Essai sur le Problème des Trois Corps* où il décrivait 5 positions particulières invariantes pour les trois corps célestes dans le repère tournant. Dans le cas particulier du problème à trois corps restreint où l'on étudie le mouvement d'un corps de masse infiniment petite dans le champ de gravité de deux autres masses tournant en orbite circulaire, les configurations trouvées par Lagrange deviennent des points d'équilibre. En effet, en ces points, la somme des forces gravitationnelles est exactement compensée par la force d'inertie et un petit corps peut rester en équilibre stable ou instable dans le système tournant à la vitesse des deux corps. Ces positions particulières furent appelées points de Lagrange. Depuis leur découverte, des astronomes, des mathématiciens [20] et des ingénieurs ont été intéressés par le mouvement d'objets dans la proximité de ces points. Les deux premiers chapitres proposent une formulation du problème à trois corps restreint, une évaluation de la position et une analyse de la stabilité au sens linéaire des points de Lagrange. Le lecteur peut se référer aux ouvrages suivants [25, 18, 19, 2, 26] pour plus de précisions sur ce sujet.

Grâce à son étude sur le contrôle et l'utilisation de satellites aux points de Lagrange dans les années 70, la NASA [5] donna une base concrète pour les missions vers ces points et lança le satellite ISEE-3 en 1978 pour orbiter le point L_1 du système Soleil-Terre [7]. Depuis cette première mission, 5 autres véhicules [4] ont été envoyés vers les points L_1 et L_2 , situés à 1,5 million de kilomètres de la Terre, SOHO, ACE, WIND, MAP et Genesis. Les modèles développés à l'époque [21] pour la description de l'orbite autour des points de Lagrange ont été améliorés grâce à l'approche des systèmes dynamiques [8]. Le troisième chapitre présente les différents types d'orbites bornées autour des points L_1 et L_2 que l'on peut exhiber avec ces méthodes. On se contentera dans cette note de l'analyse des orbites de Lissajous et on laissera pour des publications ultérieures les autres types d'orbite quasi périodiques. Les techniques de maintien à poste des satellites sur ces types d'orbite ont aussi évoluées et dans le chapitre 4, plusieurs méthodes sont présentées.

Dans la prochaine décennie, le point de Lagrange L_2 sera la destination de plusieurs missions d'observation de l'univers. Cet intérêt accru pour ce genre d'orbite vient du faible gradient de gravité et de la faible température qui règnent en ces endroits. A court terme, les agences spatiales prévoient d'envoyer des télescopes type Hubble (JWST, Hershell, Planck) mais sont spécialement intéressées par de telles propriétés pour des missions de vol en formation (Darwin, Stellar Imager, MAXIM) qui nécessitent un contrôle inter-satellite très précis. Le but de ces missions est de multiplier par mille la résolution des télescopes spatiaux grâce à l'interférométrie.

1 Le Problème à Trois Corps Restreint

Le problème à trois corps restreint est une simplification du problème à trois corps dans laquelle on considère que deux corps massifs tournent en cercle autour de leur centre de masse à vitesse constante et attirent un corps de masse négligeable qui n'affecte pas leur mouvement. Les orbites des deux corps massifs (ou système primaire) étant connues, le problème est de déterminer le mouvement du troisième corps dans le champ de gravité ainsi créé. Nous identifierons dans la suite de notre étude, ce problème au mouvement d'un satellite dans le champ de gravité combiné d'une planète et du Soleil ou d'une lune et d'une planète, en particulier le système à deux corps Soleil-Terre. Cette section propose deux formulations du problème issues de la mécanique analytique : une formulation Lagrangienne classique du problème à trois corps est proposée en section 1.1, les notions de régions de Hill et de points de Lagrange sont introduites dans les sections 1.2 et 1.3, et finalement, une formulation hamiltonienne du problème est présentée.

1.1 Formulation Lagrangienne

Considérons deux corps de masses m_1 et m_2 telles que m_1 soit supérieure ou égale à m_2 , et un troisième corps de masse m négligeable devant les deux autres ($m_1 \geq m_2 \gg m$). La distance constante entre les deux corps massifs est notée d . Comme le système primaire tourne en orbite circulaire, sa vitesse de rotation n est constante dans un repère inertiel

$$n = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{d^3}} \quad (1)$$

On note les coordonnées des masses m_1 et m_2 , (ξ_1, η_1, ζ_1) et (ξ_2, η_2, ζ_2) dans le repère inertiel $R_0, (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ dont l'origine est prise au barycentre G du système primaire. Le vecteur position du corps d'épreuve est noté \vec{r} et ses coordonnées dans R_0 , (ξ, η, ζ) . Si l'on considère que les deux seules forces qui s'appliquent sur le troisième corps sont les forces gravitationnelles du système primaire, la dynamique s'exprime ainsi

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{Gm_1m}{\rho_1^3} \vec{\rho}_1 - \frac{Gm_2m}{\rho_2^3} \vec{\rho}_2 \quad (2)$$

avec $\rho_1 = |\vec{\rho}_1|$, $\rho_2 = |\vec{\rho}_2|$ et

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_1 &= (\xi - \xi_1)\vec{I} + (\eta - \eta_1)\vec{J} + (\zeta - \zeta_1)\vec{K} \\ \vec{\rho}_2 &= (\xi - \xi_2)\vec{I} + (\eta - \eta_2)\vec{J} + (\zeta - \zeta_2)\vec{K} \end{aligned} \quad (3)$$

En adoptant la notation $\mu_1 = Gm_1$ et $\mu_2 = Gm_2$ pour les constantes gravitationnelles des deux corps, on obtient alors le système d'équations général [12] dans le repère R_0

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= -\mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{\rho_1^3} - \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{\rho_2^3} \\ \ddot{\eta} &= -\mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{\rho_1^3} - \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{\rho_2^3} \\ \ddot{\zeta} &= -\mu_1 \frac{\zeta_1 - \zeta}{\rho_1^3} - \mu_2 \frac{\zeta_2 - \zeta}{\rho_2^3} \end{aligned} \quad (4)$$

Si l'on considère que l'axe ζ est perpendiculaire au plan du mouvement du système primaire, $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$. Szebehely [25] a montré que le meilleur moyen d'étudier le problème à trois corps était d'introduire le repère tournant $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, comme représenté sur la figure (1), le vecteur \vec{i}

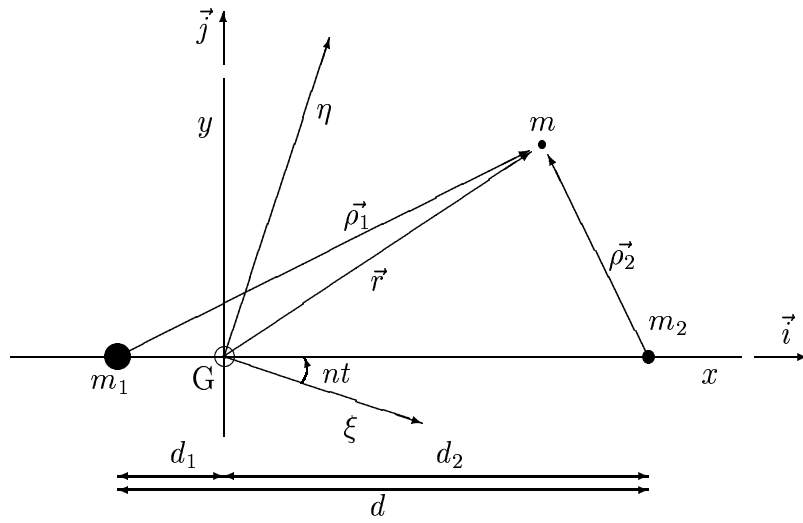


Figure 1: Repère d'étude

étant dirigé suivant l'axe joignant les deux corps massifs et dirigé vers le corps le plus petit, le vecteur \vec{k} étant dirigé suivant l'axe de rotation, et le vecteur \vec{j} complétant la base.

Le vecteur position \vec{r} s'exprime dans le nouveau repère

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (5)$$

où (x, y, z) sont les coordonnées du troisième corps dans le repère tournant. Elles sont liées aux anciennes coordonnées par les relations

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos nt - y \sin nt \\ \eta &= y \cos nt + x \sin nt \\ \zeta &= z \end{aligned} \quad (6)$$

l'accélération dans le nouveau système de coordonnées devient

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{x} - 2n\dot{y} + n^2x)\vec{i} + (\ddot{y} + 2n\dot{x} + n^2y)\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

et les deux corps m_1 et m_2 ne sont plus repérés que par leurs distances constantes au barycentre G par d_1 et d_2 , respectivement. On obtient ainsi les équations du mouvement dans le repère tournant

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x &= -\mu_1 \frac{x + d_1}{\rho_1^3} - \mu_2 \frac{x - d_2}{\rho_2^3} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y &= -\left(\frac{\mu_1}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}\right)y \\ \ddot{z} &= -\left(\frac{\mu_1}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}\right)z \end{aligned} \quad (7)$$

avec

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= (x + d_1)^2 + y^2 + z^2 \\ \rho_2^2 &= (x - d_2)^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

En choisissant d comme unité de longueur et $\frac{1}{n}$ comme unité de temps, on a les relations suivantes

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 - \mu & \mu_2 &= \mu \\ d_1 &= \mu & d_2 &= 1 - \mu \end{aligned}$$

avec $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ qui n'est plus que le seul paramètre du système et les équations (7) se simplifient

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} - x &= -(1 - \mu)\frac{x + d_1}{\rho_1^3} - \mu\frac{x - d_2}{\rho_2^3} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y &= -\left(\frac{1 - \mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3}\right)y \\ \ddot{z} &= -\left(\frac{1 - \mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3}\right)z\end{aligned}\quad (8)$$

Si on introduit la fonction Ω définie par

$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}$$

on remarque que le système (8) se transforme en

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z}\end{aligned}\quad (9)$$

En multipliant respectivement ces équations par \dot{x} , \dot{y} et \dot{z} , et les ajoutant, on obtient la relation

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \Omega}{\partial z}\dot{z}$$

qui est une différentielle totale exacte car Ω est une fonction des seules variables x, y et z . L'intégration donne

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2\Omega - C \quad (10)$$

où C est une constante d'intégration. En Mécanique de Lagrange, on appelle la relation (10), intégrale de Jacobi et la constante C , constante de Jacobi.

1.2 Régions de Hill et surfaces de vitesse nulle

On remarque que le premier membre de l'équation (10) est le carré de la vitesse du corps d'épreuve dans le repère tournant. Si l'on la note v , l'intégrale de Jacobi devient

$$v^2 = 2\Omega - C$$

ou

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = (x^2 + y^2) + \frac{2(1 - \mu)}{\rho_1} + \frac{2\mu}{\rho_2} - C \quad (11)$$

La vitesse du troisième corps peut être obtenue à partir de ses coordonnées dans le repère tournant et de la constante de Jacobi qui dépend des conditions initiales. En particulier, si l'on considère une vitesse nulle, nous avons

$$2\Omega = C$$

ou

$$(x^2 + y^2) + \frac{2(1 - \mu)}{\rho_1} + \frac{2\mu}{\rho_2} = C \quad (12)$$

avec les expressions des distances ρ_1 et ρ_2

$$\begin{aligned}\rho_1^2 &= (x + \mu)^2 + y^2 + z^2 \\ \rho_2^2 &= (x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2\end{aligned}$$

La relation (12) définit une frontière entre les régions de vitesses réelles et de vitesses imaginaires. En effet, les régions de l'espace où l'on peut trouver la particule sont celles où $2\Omega > C$. Dans l'autre partie de l'espace, v^2 est négative, ce qui donne des valeurs imaginaires à v . L'équation (12) définit des surfaces dans l'espace des coordonnées appelées surfaces de vitesse nulle et séparent l'espace en régions de Hill. Ces surfaces délimitent les volumes accessibles au troisième corps pour une valeur de la constante de Jacobi donnée mais ne donnent pas d'information sur le mouvement du corps d'épreuve dans ces volumes.

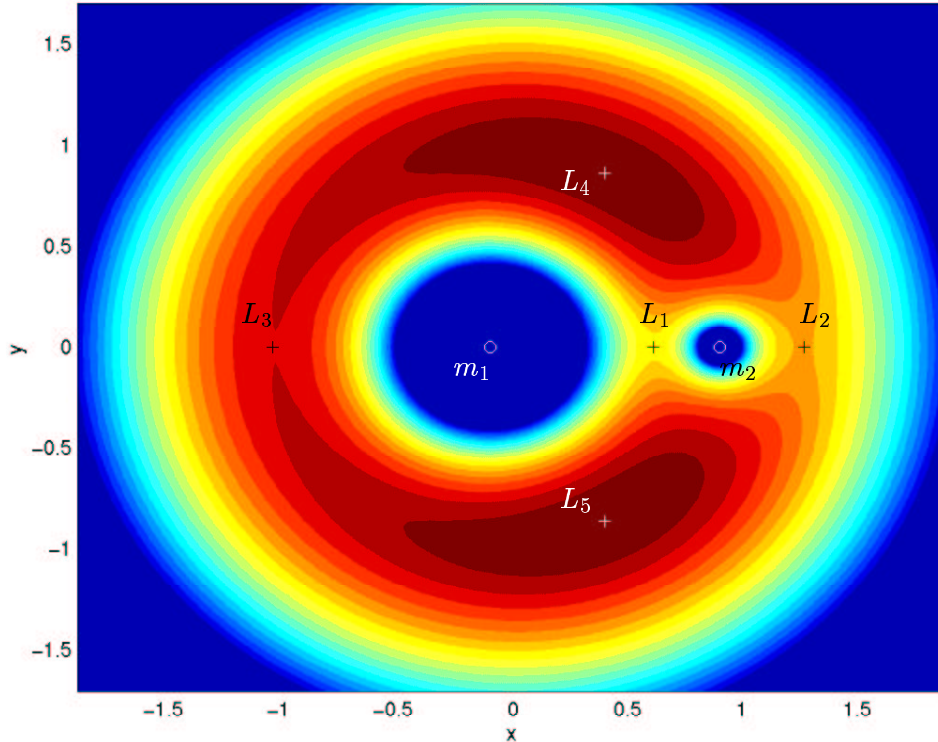


Figure 2: fonction Ω dans le plan xy

La forme de la famille des surfaces définies par l'équation (12) pour différentes constantes de Jacobi et différentes valeurs de μ semble assez compliquée. Tout d'abord, on peut remarquer que les coordonnées y et z apparaissent seulement sous forme de carré dans l'équation (12) ce qui signifie que les surfaces admettent deux plans de symétrie (xGy) et (xGz). Pour l'étude qualitative de ces surfaces, nous nous limiterons à une seule valeur de μ . Dans la majorité des systèmes à deux corps rencontrés dans la nature le rapport $m_2/(m_1 + m_2)$ est faible mais pour une meilleure visualisation des phénomènes rencontrés, nous prendrons $\mu = 0.1$ pour les figures 2 et 3. Nous limiterons aussi notre étude à l'intersection de ces surfaces avec le plan xGy car il contient les 2 corps primaires.

Considérons un premier cas où C , x et y sont grands, l'équation 12 devient

$$x^2 + y^2 \sim C_0$$

ce qui est l'équation d'un cercle. Si de nouveau la constante de Jacobi est grande mais par contre ρ_1 ou ρ_2 est petit, l'intersection de la région de Hill est deux cercles ou ovales entourant

les deux corps primaires. Pour C grand ($= C_0$), l'espace accessible au troisième corps est l'extérieur du grand cercle et l'intérieur des petits cercles comme représenté sur la figure 3(a). La surface noire représente la région interdite pour le troisième corps de constante C et elle sépare complètement les trois régions du mouvement. La particule ne peut passer de l'une à l'autre.

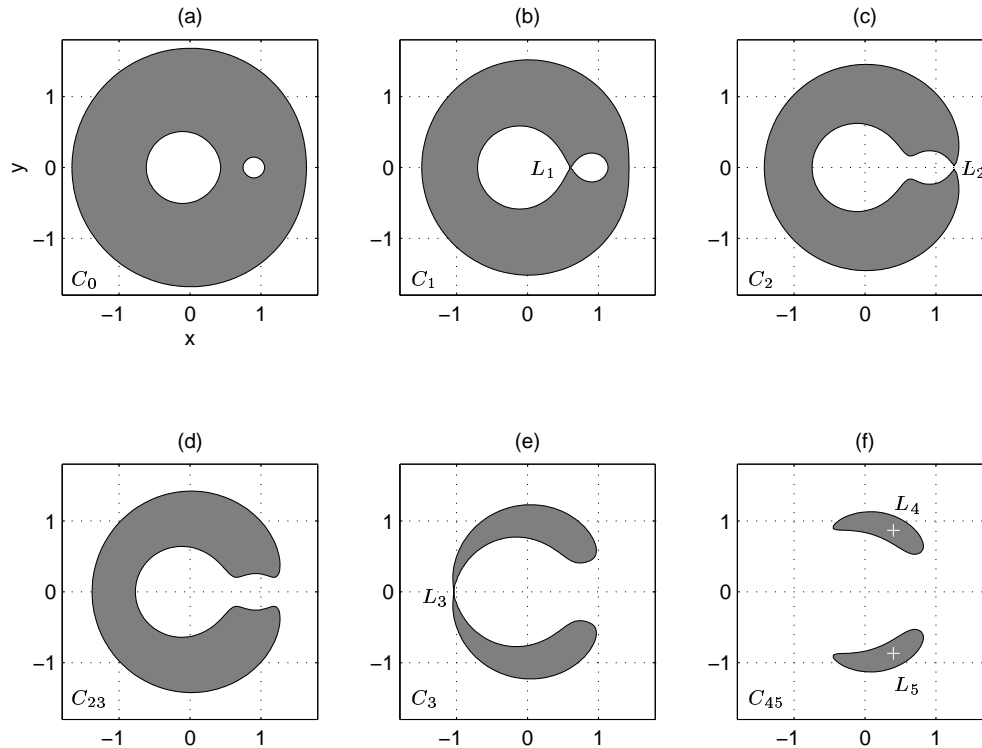


Figure 3: Valeurs particulières de C , pour $\mu = 0.1$, $C_1 = 3.6$, $C_2 = 3.46$, $C_3 = 3.1$ et $C_{45} = 2.91$ adapté de [22]

Si l'on diminue maintenant progressivement la valeur de C jusqu'à C_1 , les deux régions intérieures se transforment en poires puis se rejoignent en un point double que l'on nommera L_1 comme illustré en 3(b). En diminuant encore un peu C jusqu'à C_2 (figure 3(c)), on rencontre un nouveau point double, L_2 . Après cette valeur, la région intérieure et la région extérieure se rejoignent et le passage se fait par un col. Le cas de la figure 3(d)) sera étudié plus particulièrement dans la suite de l'étude. Un troisième point double L_3 est atteint pour $C = C_3$ (figure 3(e)) quand la région interdite se sépare en deux lobes qui finissent par disparaître, en diminuant encore C jusqu'à C_{45} , en deux points symétriques L_4 et L_5 . Les 5 points particuliers trouvés apparaissent clairement dans la représentation de la fonction potentielle Ω de la figure 2.

1.3 Les Points de Lagrange

L'analyse de l'intersection des surfaces de vitesse nulle a amené la découverte de 5 points singuliers, tous situés dans le plan du mouvement du deux corps massifs xGy . Trois d'entre eux, L_1 , L_2 et L_3 sont sur l'axe joignant ces deux corps, les deux autres L_4 et L_5 étant situés symétriquement par rapport à cet axe. D'après les règles de géométrie analytique, les 5 points doubles trouvés sont placés aux endroits où les dérivées de la fonction Ω s'annulent.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

Si l'on place maintenant le troisième corps sur un de ces points avec une vitesse nulle $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$, l'introduction des relations (13) dans les équations du mouvement (9) donne

$\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$. Cette dernière relation signifie qu'une particule placée en L_1, L_2, L_3, L_4 ou L_5 , ne subit aucune accélération, elle est donc en équilibre dans le système tournant et restera en ce point éternellement si elle n'est pas perturbée. Ces points d'équilibre relatif sont appelés **points de Lagrange**.

Les coordonnées des points de Lagrange sont données par l'équation (13)

$$\begin{aligned} x - (1 - \mu) \frac{x + d_1}{\rho_1^3} - \mu \frac{x - d_2}{\rho_2^3} &= 0 \\ y - \left(\frac{1 - \mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} \right) y &= 0 \\ - \left(\frac{1 - \mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} \right) z &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

La dernière équation de (14) nous donne $z = 0$ car son coefficient est strictement négatif. Tous les points de Lagrange sont contenus dans le plan xGy . Commençons par chercher les points qui ne sont pas sur l'axe Gx , pour lesquels $y \neq 0$. La seconde équation du système (14) donne

$$1 - \frac{1 - \mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} = 0 \quad (15)$$

En la multipliant par x et en la soustrayant à la première équation de (14)

$$-(1 - \mu) \frac{d_1}{\rho_1^3} + \frac{d_2}{\rho_2^3} = 0 \quad (16)$$

or $d_1 = \mu$ et $d_2 = 1 - \mu$, donc (16) se simplifie en

$$-\frac{1}{\rho_1^3} + \frac{1}{\rho_2^3} = 0 \quad (17)$$

qui n'a qu'une solution $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Donc les points L_4 et L_5 sont à équidistance de m_1 et de m_2 et cette distance est égale à la distance entre les deux corps d . La figure 4 montre que les deux points forment des triangles équilatéraux avec les deux corps primaires dans le plan xGy . On peut remarquer que ce résultat est indépendant du système $m_1 - m_2$ considéré. Les coordonnées des points de Lagrange L_4 et L_5 sont

$$x = 1/2 - \mu, \quad y = \pm\sqrt{3}/2, \quad z = 0$$

Pour les autres points de Lagrange L_1, L_2 et L_3 , sur l'axe Gx , ($y = 0$), leurs abscisses sont données par la première équation du système (14)

$$x - (1 - \mu) \frac{x + d_1}{|x + d_1|^3} - \mu \frac{x - d_2}{|x - d_2|^3} = 0 \quad (18)$$

Cette équation a trois racines, chacune appartenant à un intervalle différent; L_3 dans $]-\infty, -d_1[$, L_1 dans $]-d_1, d_2[$ et L_2 dans $]d_2, +\infty[$. Chaque racine est solution d'une équation quintique

$$\begin{aligned} L_1 &: x(x + \mu)^2(x + \mu - 1)^2 - (1 - \mu)(x + \mu - 1)^2 + \mu(x + \mu)^2 = 0 \\ L_2 &: x(x + \mu)^2(x + \mu - 1)^2 - (1 - \mu)(x + \mu - 1)^2 - \mu(x + \mu)^2 = 0 \\ L_3 &: x(x + \mu)^2(x + \mu - 1)^2 + (1 - \mu)(x + \mu - 1)^2 + \mu(x + \mu)^2 = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

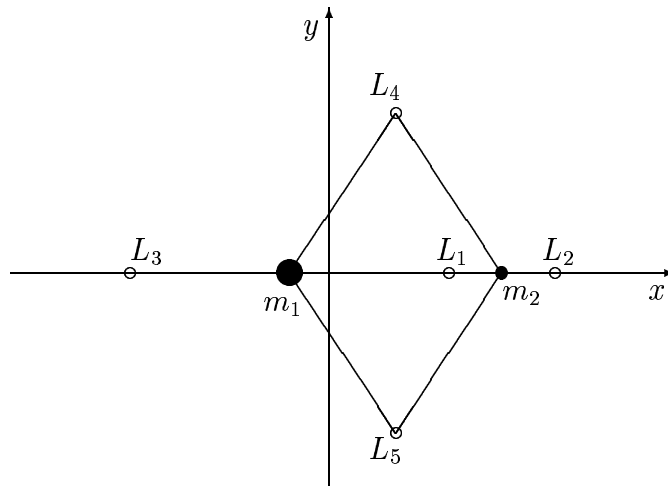


Figure 4: points de Lagrange

On remarque que la position des trois points dépend cette fois du rapport μ . Plus μ est petit plus les points L_1 et L_2 se rapprochent de m_2 . La distance γ de ces points au corps primaire le plus petit est donnée par l'équation

$$\gamma^5 \mp (3 - \mu)\gamma^4 + (3 - 2\mu)\gamma^3 - \mu\gamma^2 \pm 2\mu\gamma - \mu = 0 \quad (20)$$

dans laquelle les signes du haut sont pour L_1 et ceux du bas pour L_2 .

La signification physique de l'équilibre du troisième corps aux points de Lagrange est illustré sur la figure 5. En ces points, la somme des forces gravitationnelles due aux deux corps est annulée par la force centrifuge nécessaire pour maintenir un objet sur une orbite circulaire avec la même vitesse que le système primaire.

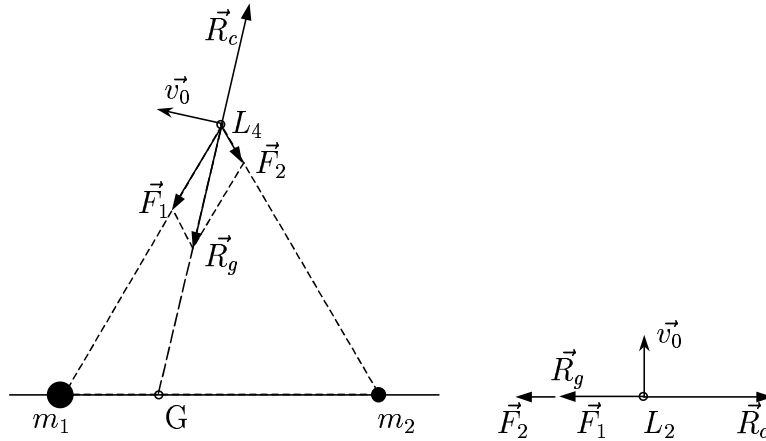


Figure 5: Explication physique des points de Lagrange

Dans les deux cas présentés en figure 5 de L_4 et L_2 , les forces gravitationnelles de m_1 et m_2 sont égales respectivement à \vec{F}_1 et \vec{F}_2 . La force résultante \vec{R}_g est dirigée suivant GL_i . La force centrifuge \vec{R}_c est dirigée perpendiculairement à la vitesse de rotation donc aussi suivant GL_i mais en direction opposée. La nature du point de Lagrange vient de la relation $\vec{R}_g + \vec{R}_c = 0$.

Le tableau (1) présente les trois systèmes de référence que nous utiliserons au cours de notre étude. Il donne l'échelle de temps et d'espace et les distances des points de Lagrange L_1 et L_2 par rapport au corps 2 dans le système à deux corps $m_1 - m_2$, m_1 étant toujours le corps le

plus massif. La distance des points L_4 et L_5 n'est pas indiquée car elle est égale à la distance entre les deux corps par définition. Le point L_3 présente peu d'intérêt car l'influence du deuxième corps y est faible et pour les trois systèmes considérés avec μ petit, $x_e(L_3) \simeq -1$. Les systèmes Terre-Lune et Soleil-Terre sont les premiers à avoir suscité l'intérêt de la communauté scientifique et technique car les points de Lagrange de ces systèmes sont les plus proches de la Terre mais l'étude d'autres systèmes à deux corps comme Soleil-Jupiter ont pu expliquer d'autres phénomènes liés aux points de Lagrange. Pour une meilleure précision dans les calculs, la masse m_2 dans le système Soleil-Terre est prise égale à la somme des masses de la Terre et de la Lune et la position du corps 2 est celle de la position moyenne du barycentre Terre-Lune. On note ce système qui reste à 2 corps, Soleil-(Terre+Lune).

Système	Terre-Lune	Soleil-(Terre+Lune)	Soleil-Jupiter
distance d (km)	384 399, 06	149 597 871, 41	778 330 000
période (jours)	27, 3217	365, 2564	4332, 71
n (s^{-1})	$2, 66170 \times 10^{-6}$	$1, 99099 \times 10^{-7}$	$1, 67844 \times 10^{-8}$
paramètre μ	$1, 21505 \times 10^{-2}$	$3, 04042 \times 10^{-6}$	$9, 54294 \times 10^{-4}$
distance $\gamma_1(\frac{1}{d})$	1.50934×10^{-1}	1.00110×10^{-2}	6.66901×10^{-2}
distance $\gamma_2(\frac{1}{d})$	1.67833×10^{-1}	1.00782×10^{-2}	6.97948×10^{-2}
distance γ_1 (km)	58 019	1 497 621	51 906 880
distance γ_2 (km)	64 515	1 507 683	54 323 414

Table 1: Distance des points de Lagrange L_1 et L_2 pour différents couples du système solaire

1.4 Formulation Hamiltonienne

L'approche de Hamilton des systèmes dynamiques, que nous allons développer dans cette section, n'apporte rien de nouveau du point de vue physique mais elle offre des outils puissants, que nous utiliserons dans la suite de l'étude pour nous permettre une interprétation géométrique de la mécanique. Dans la formulation Lagrangienne utilisée jusqu'ici les coordonnées généralisées q_k étaient les coordonnées dans le repère tournant; x , y et z et le système était complètement décrit par l'état $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Dans la formulation hamiltonienne du système, on remplace les vitesses par les impulsions généralisée p_k , de tel sorte que les q_k et p_k soient indépendants.

Si l'on applique la transformée de Legendre à la formulation Lagrangienne précédemment obtenue, on trouve l'Hamiltonien H du système défini par

$$H = \frac{1}{2} [(p_x + y)^2 + (p_y - x)^2 + p_z^2] - \Omega(x, y, z) \quad (21)$$

On peut noter que la constante de Jacobi est égale à $-2H$. Grâce à l'Hamiltonien ainsi défini, on peut écrire les équations canoniques de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x + y & \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = p_y - x + \Omega_x \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y - x & \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x - y + \Omega_y \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = p_z & \dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z} = \Omega_z \end{aligned} \quad (22)$$

où Ω_x , Ω_y et Ω_z sont les dérivées partielles de Ω par rapport à x , y et z . Grâce au formalisme d'Hamilton, nous avons remplacé 3 équations différentielles de second ordre (8) par 6 équations

différentielles du premier ordre (22), ce qui peut faciliter la résolution du système. L'état complet du système à un instant t est un point (x, y, z, p_x, p_y, p_z) dans un espace à 6 dimensions, appelé espace des phases.

2 Stabilité des Points de Lagrange

Cette section propose une étude de la stabilité des points de Lagrange et une analyse du mouvement à proximité de ces points, elle sera particulièrement détaillée pour L_1 et L_2 grâce au formalisme d'Hamilton. La question considérée ici est de comprendre le comportement d'une particule en équilibre si elle est légèrement déplacée d'un point de Lagrange, on suppose aussi qu'une légère vitesse lui est donnée. Si elle s'éloigne rapidement du point, la position d'équilibre est considérée comme instable. Si, au contraire, la particule reste à proximité en oscillant légèrement, la position d'équilibre est dite stable. Le problème de stabilité d'un point d'équilibre est crucial en mécanique spatiale.

2.1 Linéarisation des équations

Pour étudier la stabilité des points de Lagrange, nous allons étudier le comportement du troisième corps à proximité de ces points en linéarisant les équations du mouvement par rapport à la position d'équilibre. Notons la position du point de Lagrange par (x_e, y_e, z_e) où $z_e = 0$, et la position de la particule \vec{r} par rapport au point $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ de sorte que

$$\begin{aligned} x &= x_e + \tilde{x} \\ y &= y_e + \tilde{y} \\ z &= z_e + \tilde{z} \end{aligned} \quad (23)$$

En introduisant ces relations dans les équations du mouvement (9) et en développant les seconds membres en séries de Taylor, on obtient

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} - 2\dot{\tilde{y}} &= \tilde{x} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} \right)_{L_i} + \tilde{y} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} \right)_{L_i} + \tilde{z} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial z} \right)_{L_i} + \dots \\ \ddot{\tilde{y}} + 2\dot{\tilde{x}} &= \tilde{x} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial x} \right)_{L_i} + \tilde{y} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right)_{L_i} + \tilde{z} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial z} \right)_{L_i} + \dots \\ \ddot{\tilde{z}} &= \tilde{x} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \partial x} \right)_{L_i} + \tilde{y} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \partial y} \right)_{L_i} + \tilde{z} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \right)_{L_i} + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Si l'on considère que \tilde{x} , \tilde{y} et \tilde{z} sont petits, on peut négliger les ordres supérieurs à 1 dans le développement en série. En ne conservant que le premier ordre, nous avons le système linéaire d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} - 2\dot{\tilde{y}} &= \tilde{x}\Omega_{xx} + \tilde{y}\Omega_{xy} + \tilde{z}\Omega_{xz} \\ \ddot{\tilde{y}} + 2\dot{\tilde{x}} &= \tilde{x}\Omega_{yx} + \tilde{y}\Omega_{yy} + \tilde{z}\Omega_{yz} \\ \ddot{\tilde{z}} &= \tilde{x}\Omega_{zx} + \tilde{y}\Omega_{zy} + \tilde{z}\Omega_{zz} \end{aligned} \quad (25)$$

où les quantités

$$\Omega_{uv} = \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} \right)_{L_i}$$

sont des constantes car évaluées aux points de Lagrange. Comme Ω est C^∞ partout sauf aux singularités que sont les masses m_1 et m_2 , $\Omega_{uv} = \Omega_{vu}$.

Définissons la quantité c_2 comme

$$c_2 = \frac{1 - \mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3}$$

et procédons à quelques simplifications en dérivant Ω_z par rapport à x et y d'après les équations 8

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial z} = -z \frac{\partial c_2}{\partial x} \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial z} = -z \frac{\partial c_2}{\partial y} \quad (27)$$

Comme $z_e = 0$ pour les cinq points de Lagrange, les quantités Ω_{xz} et Ω_{yz} sont nulles et l'on peut simplifier le système (25) en

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} - 2\dot{\tilde{y}} &= \tilde{x}\Omega_{xx} + \tilde{y}\Omega_{xy} \\ \ddot{\tilde{y}} + 2\dot{\tilde{x}} &= \tilde{x}\Omega_{yx} + \tilde{y}\Omega_{yy} \\ \ddot{\tilde{z}} &= \tilde{z}\Omega_{zz} \end{aligned} \quad (28)$$

La dernière équation du système linéarisé (28) est maintenant découplée des deux autres. Le mouvement sur l'axe z que l'on appellera mouvement hors du plan est indépendant du mouvement dans le plan xy . Il est décrit par l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - \Omega_{zz} = 0 \quad (29)$$

Il faut étudier le signe de Ω_{zz} pour connaître le type de mouvement et savoir si les racines de l'équation 29 sont réelles ou imaginaires pures.

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = -c_2 - z \frac{\partial c_2}{\partial z} \quad (30)$$

donc comme précédemment, les points de Lagrange dans le plan font que

$$\Omega_{zz} = -c_2$$

Le coefficient c_2 étant positif, les valeurs propres de l'équation linéaire sont par conséquence

$$\lambda_{5,6} = \pm i \sqrt{|\Omega_{zz}|} = \pm i \nu \quad (31)$$

où ν est la pulsation du mouvement harmonique sur l'axe z . La solution s'exprime du manière générale

$$z(t) = A_5 \cos \nu t + A_6 \sin \nu t \quad (32)$$

Les constantes d'intégration A_5 et A_6 peuvent être calculées en fonction des conditions initiales

$$z(t) = z(0) \cos \nu t + (\dot{z}(0)/\nu) \sin \nu t \quad (33)$$

Le mouvement hors du plan est toujours stable quels que soient le point de Lagrange et le système primaire μ considérés. Pour le mouvement dans le plan, les deux équations différentielles du second ordre peuvent être transformées en un système d'équation du premier ordre

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (34)$$

où

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega_{xx} & \Omega_{xy} & 0 & 2 \\ \Omega_{xy} & \Omega_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

L'équation caractéristique d'ordre 4 du mouvement dans le plan est

$$\lambda^4 + (4 - \Omega_{xx} - \Omega_{yy})\lambda^2 + \Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2 = 0 \quad (36)$$

La solution de ce système s'exprime d'une façon générale

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^4 A_i e^{\lambda_i t}, \quad \tilde{y}(t) = \sum_{i=1}^4 B_i e^{\lambda_i t} \quad (37)$$

L'étude de la stabilité du mouvement d'une particule dans le voisinage du point d'équilibre va se faire grâce à l'étude des valeurs propres du système linéaire nouvellement défini. Si elles ont toutes une partie réelle négative ou nulle alors le système est stable. Dans le cas où une seule valeur a une partie réelle positive, le système est instable.

Nous allons séparer notre étude en deux cas : les points triangulaires L_4 et L_5 et les points collinéaires L_1 , L_2 et L_3 car le comportement d'une particule au voisinage d'un point de Lagrange sera différent suivant la famille du point considéré.

2.2 Les points triangulaires

Intéressons-nous aux autres coefficients du système d'équations linéaires (28). En dérivant Ω , on obtient

$$\Omega_{xx} = 1 - c_2 + 3(1 - \mu) \frac{(x_e + d_1)^2}{\rho_1^5} + 3\mu \frac{(x_e - d_2)^2}{\rho_2^5} \quad (38)$$

$$\Omega_{yy} = 1 - c_2 + 3 \left(\frac{1 - \mu}{\rho_1^5} + \frac{\mu}{\rho_2^5} \right) y_e^2 \quad (39)$$

$$\Omega_{xy} = 3 \left[(1 - \mu) \frac{x_e + d_1}{\rho_1^5} + 3\mu \frac{x_e - d_2}{\rho_2^5} \right] y_e \quad (40)$$

La section précédente a montré que pour les points triangulaire, $\rho_1 = \rho_2 = 1$ et

$$x = 1/2 - \mu, \quad y = \pm\sqrt{3}/2, \quad z = 0$$

En substituant ces coordonnées dans les équations (38-40), et en notant que $c_2 = 1$, on obtient

$$\Omega_{xx} = \frac{3}{4}, \quad \Omega_{zz} = -1 \quad \Omega_{yy} = \frac{9}{4}, \quad \Omega_{xy} = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)$$

Le système d'équations linéarisées autour d'un point triangulaire est

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} - 2\dot{\tilde{y}} &= \frac{3}{4}\tilde{x} + \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)\tilde{y} \\ \ddot{\tilde{y}} + 2\dot{\tilde{x}} &= \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)\tilde{x} + \frac{9}{4}\tilde{y} \\ \ddot{\tilde{z}} &= -\tilde{z} \end{aligned} \quad (41)$$

On remarque que $\nu = 1$, la période du mouvement du troisième sur l'axe z est égale à la période de rotation des deux corps massifs autour du centre de gravité du système. L'équation caractéristique (36) du mouvement dans le plan devient

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0 \quad (42)$$

Les racines de cette équation bicarrée sont

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -1 + [1 - 27\mu(1 - \mu)]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (43)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -1 - [1 - 27\mu(1 - \mu)]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (44)$$

Le système n'est stable que dans le cas où toutes les racines sont imaginaires pures et cette condition est réalisée si et seulement si

$$1 - 27\mu(1 - \mu) \geq 0$$

Le résolution de cette inéquation donne le résultat suivant. Le mouvement d'une particule dans le voisinage de L_4 ou L_5 est **stable** quand le paramètre μ d'un système à deux corps est plus petit que μ_0

$$0 < \mu < \mu_0 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{23}{108}} \simeq 0.0385$$

Pour la majorité des cas rencontrés dans la système solaire, cette condition sera vérifiée et nous n'étudierons pas le cas instable¹. Pour un système stable, le mouvement plan a 2 fréquences propres ω_1 et ω_2 , que l'on peut approximer au premier ordre.

$$\omega_1 = \sqrt{1 - (27/4)\mu} \quad \omega_2 = \sqrt{(27/4)\mu}$$

Pour le système Soleil-Jupiter par exemple, avec les données de la section 1.3, $\omega_1 = 0.996756091$ et $\omega_2 = 0.0804816436$ ce qui correspond à des périodes de 11.9 et 147.5 ans. La figure 6 montre la trajectoire d'un corps lâché à un millier de kilomètre du point L_4 de Jupiter, suivant la dynamique linéaire des équations (41). L'exemple pris correspond aux orbites observées des astéroïdes orbitant autour des points L_4 et L_5 de Jupiter appelés les Troyens. La trajectoire

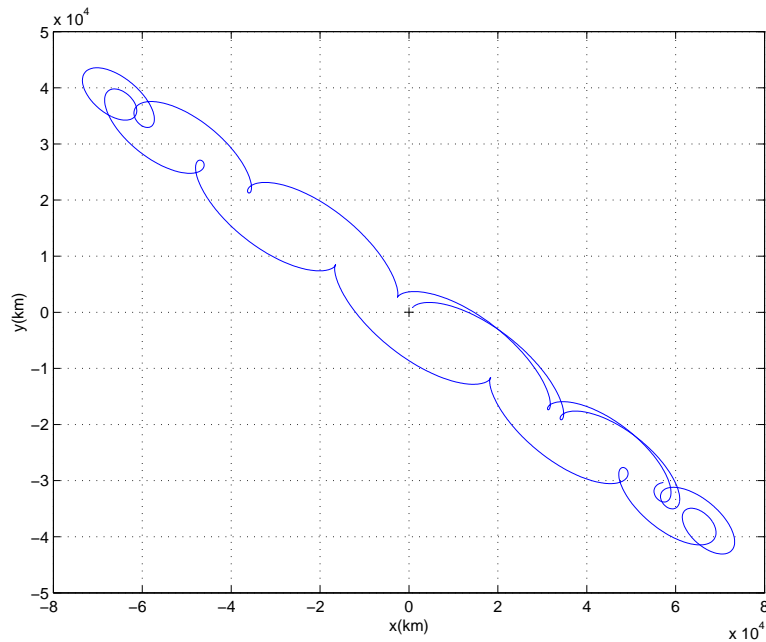


Figure 6: Trajectoire d'astéroïde troyen autour du point de Lagrange L_4 du système Soleil-Jupiter sur une période de 170 ans

observée est la composition de deux mouvements représentés sur la figure 7: un mouvement

¹Les seuls deux corps dans le système solaire pour lesquels $\mu > \mu_0$ sont Pluton et son satellite Charon

elliptique très allongé de longue période correspondant à ω_2 et un mouvement épicyclique de période égale à la période du système primaire, $\omega_1 \simeq 1$, du au mouvement képlérien du point de Lagrange.

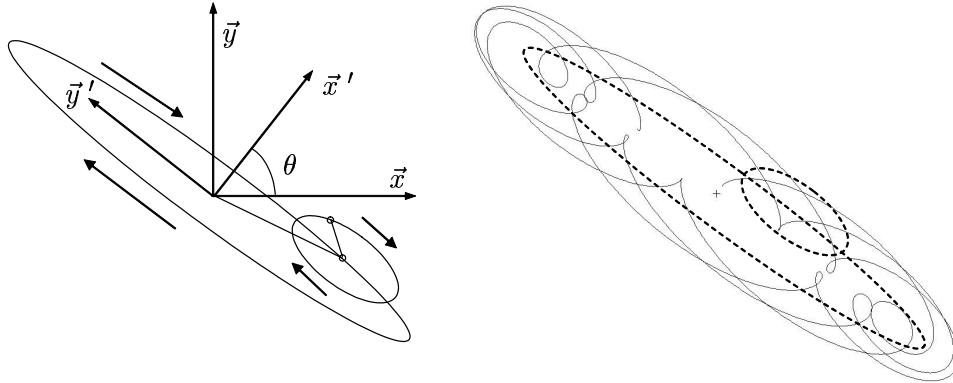


Figure 7: Décomposition du mouvement autour de L_4

On peut montrer [19] que, pour de faibles oscillations autour de L_4 , le rapport des axes de l'ellipse allongée est $\sqrt{3\mu}$ tandis que celui de l'ellipse du mouvement épicyclique est de $1/2$. Le calcul de l'orientation de ces ellipses se fait en éliminant le couplage entre x et y représenté par le terme en Ω_{xy} dans le système (41). Le terme de couplage est annulé grâce à une rotation d'angle θ tel que

$$\tan 2\theta = \sqrt{3}(1 - 2\mu)$$

2.3 Les points collinéaires

Les points collinéaires L_1 , L_2 et L_3 se trouvent sur l'axe x donc seul x_e est non nul. En remarquant que c_2 n'est plus égal à 1

$$c_2 = \frac{1 - \mu}{|x_e + d_1|^3} + \frac{\mu}{|x_e - d_2|^3}$$

le calcul des coefficients Ω_{xx} et Ω_{yy} à partir des équations (38) et (39) est direct

$$\begin{aligned} \Omega_{xx} &= 1 + 2c_2 > 0 \\ \Omega_{yy} &= 1 - c_2 < 0 \end{aligned}$$

et l'équation (40) donne $\Omega_{xy} = 0$. De plus, on remarque que Ω_{xx} est strictement positif et il peut être démontré [25], que Ω_{yy} est strictement négatif. Le système linéaire d'équations différentielles pour les points collinéaires est par conséquent

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} - 2\dot{\tilde{y}} - (1 + 2c_2)\tilde{x} &= 0 \\ \ddot{\tilde{y}} + 2\dot{\tilde{x}} + (c_2 - 1)\tilde{y} &= 0 \\ \ddot{\tilde{z}} + c_2\tilde{z} &= 0 \end{aligned} \tag{45}$$

L'équation caractéristique (36) du mouvement dans le plan est

$$\lambda^4 + (2 - c_2)\lambda^2 - 2c_2^2 + c_2 + 1 = 0 \tag{46}$$

en introduisant $\Lambda = \lambda^2$ dans cette équation bicarrée

$$\Lambda^2 + 2\beta_1\Lambda - \beta_2^2 = 0 \quad (47)$$

où

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1 - \frac{c_2}{2} = 2 - \frac{\Omega_{xx} + \Omega_{yy}}{2} \\ \beta_2^2 &= 2c_2^2 - c_2 + 1 = -\Omega_{xx}\Omega_{yy} > 0 \end{aligned}$$

Ce trinôme a deux solutions réelles de signe opposé

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= -\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} > 0 \\ \Lambda_2 &= -\beta_1 - \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} < 0 \end{aligned}$$

A partir de ces solutions, on obtient les quatres valeurs propres du système décrivant le mouvement dans le plan xy

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = \pm\Lambda_1^{1/2} &= \pm\sqrt{-\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} = \pm\lambda \\ \lambda_{3,4} = \pm\Lambda_2^{1/2} &= \pm i\sqrt{\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} = \pm i\omega \end{aligned}$$

La solution générale du système (45) peut s'écrire comme la superposition d'un mode stable, d'un mode instable correspondant aux valeurs propres réelles opposées $\pm\lambda$ et d'un mouvement harmonique de pulsation ω . On retrouve toujours l'oscillation découplée sur l'axe z avec une pulsation différente ν

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= A_1 e^{\lambda t} + A_2 e^{-\lambda t} + A_3 \cos \omega t + A_4 \sin \omega t \\ \tilde{y}(t) &= cA_1 e^{\lambda t} - cA_2 e^{-\lambda t} + kA_4 \cos \omega t - kA_3 \sin \omega t \\ \tilde{z}(t) &= A_5 \cos \nu t + A_6 \sin \nu t \end{aligned} \quad (48)$$

où les coefficients c et k ont été obtenus en introduisant une solution de la forme (37) dans la première équation du système (45)

$$c = \frac{\lambda^2 - 1 - 2c_2}{2\lambda}, \quad k = \frac{\omega^2 + 1 + 2c_2}{2\omega}$$

Les coefficients $(A_i)_{i \in [1,4]}$ peuvent être écrits comme fonctions linéaires des conditions initiales

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k\omega}{2b_1} & \frac{\omega}{2b_2} & -\frac{k}{2b_2} & \frac{1}{2b_1} \\ \frac{k\omega}{2b_1} & -\frac{\omega}{2b_2} & \frac{k}{2b_2} & \frac{1}{2b_1} \\ \frac{c\lambda}{b_1} & 0 & 0 & -\frac{1}{b_1} \\ 0 & -\frac{\lambda}{b_2} & -\frac{c}{b_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_0 \\ \dot{\tilde{x}}_0 \\ \dot{\tilde{y}}_0 \end{pmatrix} \quad (49)$$

avec $b_1 = c\lambda + k\omega$ et $b_2 = c\omega - k\lambda$

Contrairement aux points triangulaires L_4 et L_5 , le mouvement dans le voisinage d'un point de Lagrange collinéaire est toujours **instable** du fait du terme en $e^{\lambda t}$ qui diverge avec le temps, ce qui n'empêche pas l'obtention de mouvements bornés sous certaines conditions.

Les conditions initiales peuvent être choisies de telle sorte que la solution ne contienne plus que les modes oscillatoires. La condition $A_1 = A_2 = 0$ est obtenue si

$$\dot{\tilde{x}}_0 = \frac{\omega \tilde{y}_0}{k}, \quad \dot{\tilde{y}}_0 = -k\omega \tilde{x}_0 \quad (50)$$

Si les conditions initiales respectent ces relations alors la solution peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= -A_x \cos(\omega t + \phi) \\ \tilde{y}(t) &= kA_x \sin(\omega t + \phi) \\ \tilde{z}(t) &= A_z \cos(\nu t + \psi) \end{aligned} \quad (51)$$

où A_x , A_z , ϕ et ψ sont les amplitudes et les phases des mouvements suivant les axes x et z , l'amplitude suivant y étant contrainte $A_y = kA_x$. La trajectoire du troisième corps décrit, dans le plan, une ellipse dans le sens horaire, qui a pour équation

$$\tilde{x}^2 + \frac{\tilde{y}^2}{k^2} = A_x^2$$

La différence de fréquence entre les mouvements dans le plan et hors du plan fait que la trajectoire en trois dimensions n'est pas périodique sauf cas exceptionnel où il existe un rapport rationnel entre ν et ω . Comme illustré sur la figure 8, la particule se déplace sur un cylindre qui a pour base l'ellipse décrite précédemment. Ce genre de trajectoire est appelé **Lissajous**.

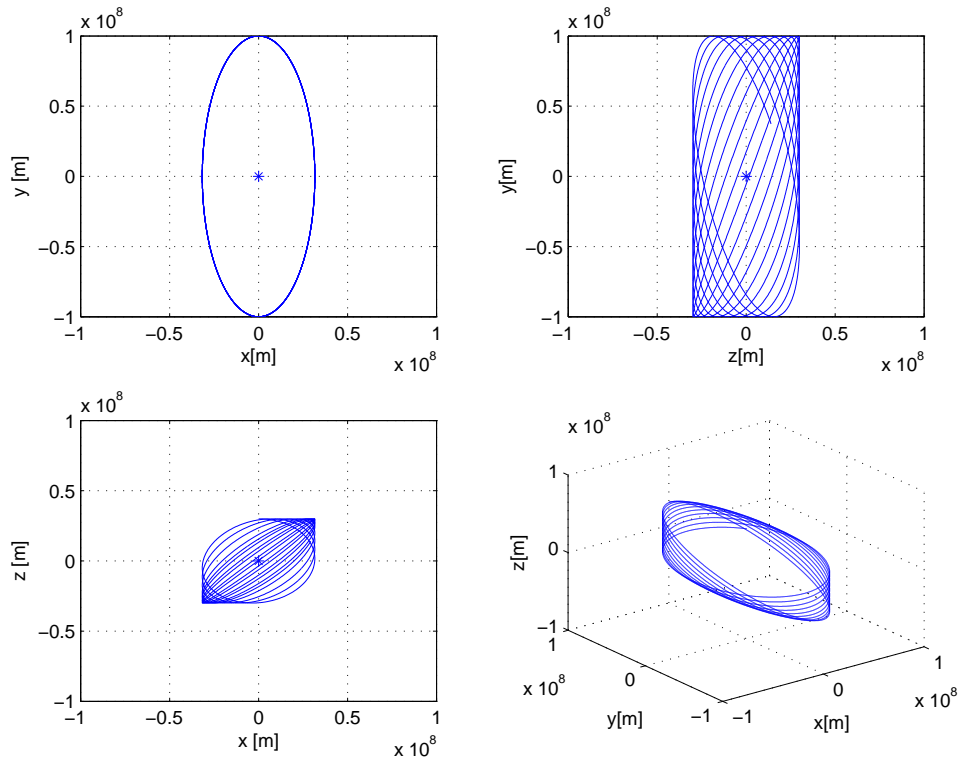


Figure 8: Trajectoire de Lissajous autour du point de Lagrange L_2 du système Soleil-Terre

Pour le système Soleil-(Terre+Lune) de la section 1.3, les grandeurs caractéristiques du point L_2 sont $\omega = 2.0570$, $\lambda = 2.4843$ et $\nu = 1.9850$. Il est à noter que pour les systèmes à deux corps du système solaire (μ petit), les valeurs propres du système linéaire sont toutes proches de 2,

spécialement les deux pulsations des mouvements harmoniques du plan et hors du plan, ce qui donne des trajectoires quasi-périodiques. Dans le cas de la figure 8, la période du mouvement elliptique dans le plan est de 179.0 jours et celle du mouvement oscillatoire sur l'axe z est de 185.6 jours. La quasi-période du mouvement peut être approximer par la moitié de la période du système à deux corps. Par exemple, pour le système Terre-Lune, les périodes des modes oscillatoires sont 14.7 et 15.3 jours quand la période de Lune est de 27.3 jours. L'existence d'orbites quasi-périodiques autour des points de Lagrange collinéaires ne veut pas dire qu'elles soient stables. La longévité de ces orbites dépend de la précision des conditions (50). Une précision de 10^{-14} ne permet pas de faire plus de 4 tours dans le plan.

Étudions les modes stable et instable du système linéaire. Les modes oscillatoires peuvent être éliminés comme l'ont été les modes réels pour l'obtention de courbe de Lissajous. La condition $A_3 = A_4 = 0$ est vraie si

$$\dot{\tilde{y}}_0 = c\lambda\tilde{x}_0, \quad \dot{\tilde{x}}_0 = \frac{\lambda\tilde{y}_0}{c} \quad (52)$$

Les trajectoires obtenues avec ces conditions sont des hyperboles dans le repère (\tilde{x}, \tilde{y}) . Ces hyperboles représentées sur la figure 9 en pointillés, ont une asymptote en $t \rightarrow -\infty$ d'équation $\tilde{y} = -c\tilde{x}$ et une asymptote en $t \rightarrow +\infty$ d'équation $\tilde{y} = c\tilde{x}$ que l'on appellera, respectivement asymptote stable et asymptote instable.

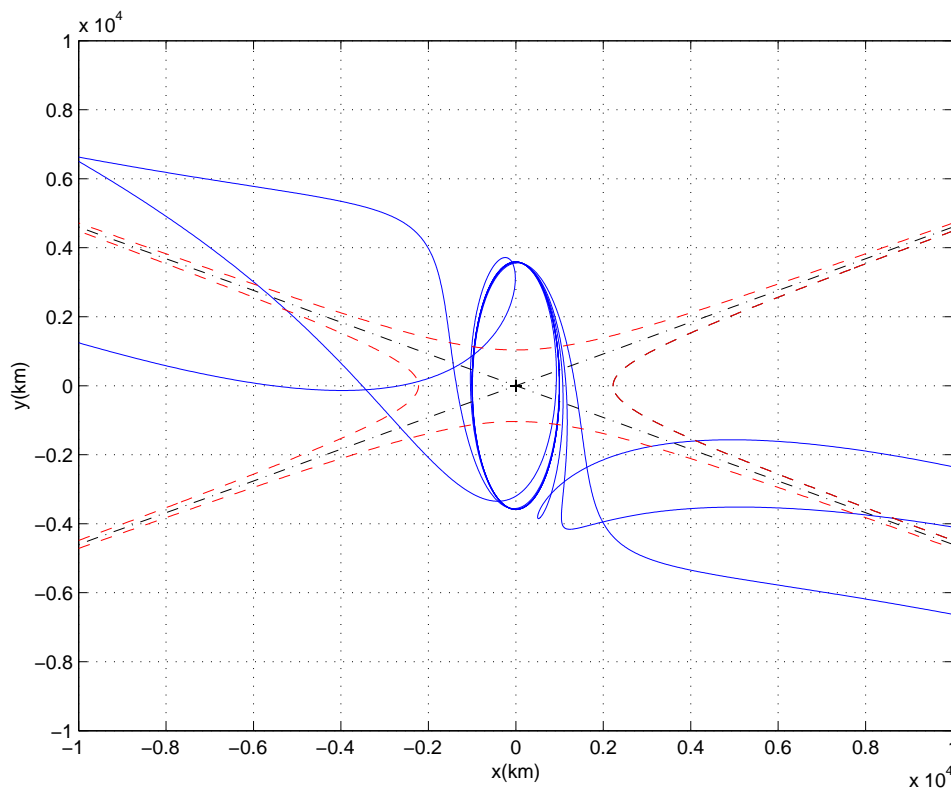


Figure 9: Trajectoire de Lissajous autour du point de Lagrange L_2 du système Soleil-Terre

En conséquence, toute solution du problème linéaire va diverger dans une des deux directions de l'asymptote instable. Les courbes en trait plein de la figure 9 représentent des solutions complètes du problème linéaire, dans le cas L_1 du système Terre-Lune. Les conditions initiales sont prises proches de celles d'une trajectoire de Lissajous. Les trajectoires divergent après quelques tours. Il existe d'autres trajectoires quasi périodiques et même périodiques au voisinage des points colinéaires (orbites de halo, quasi halo ou de Lyapounov) qui font intervenir le

caractère non linéaire de la dynamique. Dans cette étude nous ne traiterons que les orbites de Lissajous, les autres trajectoires quasi périodiques feront l'objet de notes à venir.

2.4 Analyse géométrique (Hamilton)

Les points de Lagrange collinéaires L_1 et L_2 des systèmes Terre-Lune et Soleil-(Terre+Lune) sont les plus proches de la Terre mais aussi les plus accessibles pour des sondes envoyées à partir de notre planète. Grâce au formalisme d'Hamilton, nous allons analyser plus en détail la géométrie de l'espace des phases au voisinage de ces points. Pour retrouver les équations linéaires, il faut exprimer l'Hamiltonien (21) en fonction des coordonnées par rapport au point de Lagrange $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ et garder les termes quadratiques. Le nouvel Hamiltonien du système linéaire est appelé H_2

$$H_2 = \frac{1}{2} \{ (p_{\tilde{x}} + \tilde{y})^2 + (p_{\tilde{y}} - \tilde{x})^2 + p_{\tilde{z}}^2 - \Omega_{xx}\tilde{x}^2 - \Omega_{yy}\tilde{y}^2 - \Omega_{zz}\tilde{z}^2 \} \quad (53)$$

avec toujours

$$\begin{aligned} \Omega_{xx} &= 1 + 2c_2, & \Omega_{yy} &= 1 - c_2, & \Omega_{zz} &= -c_2 \\ c_2 &= \mu |x_e + \mu - 1|^{-3} + (1 - \mu) |x_e + \mu|^{-3} \end{aligned}$$

En formulant les équations canoniques, on retrouve les équations linéaires (45)

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \frac{\partial H_2}{\partial p_{\tilde{x}}} = p_{\tilde{x}} + \tilde{y} & \dot{p}_{\tilde{x}} &= -\frac{\partial H_2}{\partial \tilde{x}} = p_{\tilde{y}} + 2c_2\tilde{x} \\ \dot{\tilde{y}} &= \frac{\partial H_2}{\partial p_{\tilde{y}}} = p_{\tilde{y}} - \tilde{x} & \dot{p}_{\tilde{y}} &= -\frac{\partial H_2}{\partial \tilde{y}} = -p_{\tilde{x}} - c_2\tilde{y} \\ \dot{\tilde{z}} &= \frac{\partial H_2}{\partial p_{\tilde{z}}} = p_{\tilde{z}} & \dot{p}_{\tilde{z}} &= -\frac{\partial H_2}{\partial \tilde{z}} = -c_2\tilde{z} \end{aligned} \quad (54)$$

Le système a toujours les mêmes valeurs propres $\pm\lambda$, $\pm i\omega$ et $\pm i\nu$. Pour comprendre mieux la structure de l'espace des phases, on opère un changement linéaire tels que les vecteurs propres soient les axes du nouveau système. En utilisant les nouvelles coordonnées $(q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3)$, les équations différentielles prennent la forme simple

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \lambda q_1 & p_1 &= -\lambda p_1 \\ \dot{q}_2 &= \omega p_2 & p_2 &= -\omega q_2 \\ \dot{q}_3 &= \nu p_3 & p_3 &= -\nu q_3 \end{aligned} \quad (55)$$

et l'Hamiltonien devient

$$H_2 = \lambda q_1 p_1 + \frac{\omega}{2} (q_2^2 + p_2^2) + \frac{\nu}{2} (q_3^2 + p_3^2) \quad (56)$$

La solution de (55) s'exprime facilement

$$\begin{aligned} q_1(t) &= q_1(0)e^{\lambda t}, & p_1(t) &= p_1(0)e^{-\lambda t} \\ q_2(t) + ip_2(t) &= (q_2(0) + ip_2(0))e^{-i\omega t} \\ q_3(t) + ip_3(t) &= (q_3(0) + ip_3(0))e^{-i\nu t} \end{aligned} \quad (57)$$

Ces équations linéaires admettent des intégrales, autres que l'Hamiltonien, qui sont les fonctions $p_1 q_1$, $q_2^2 + p_2^2$ et $q_3^2 + p_3^2$, constantes le long d'une solution.

L'analyse de l'espace des phases linéarisé est réalisée, avec la technique développée dans [9].

Considérons une région R de l'espace des phases paramétrée par h et c , constantes positives, telle que

$$H_2 = h, \quad |p_1 - q_1| \leq c$$

La région ainsi définie est homomorphe au produit d'une hypersphère de dimension 4 et d'un intervalle, que l'on notera $S^4 \times I$. En effet, si l'on fixe la valeur de $p_1 - q_1$, l'équation $H_2 = h$ donne l'équation de l'hypersphère-4

$$\frac{\lambda}{4}(q_1 + p_1)^2 + \frac{\omega}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\nu}{2}(q_3^2 + p_3^2) = h + \frac{\lambda}{4}(p_1 - q_1)^2$$

dans l'espace à 5 dimensions $(p_2, q_2, p_3, q_3, p_1 + q_1)$. Nous appellerons l'ensemble des points tels que $p_1 + q_1 > 0$ et $p_1 + q_1 < 0$, respectivement hémisphère nord et hémisphère sud

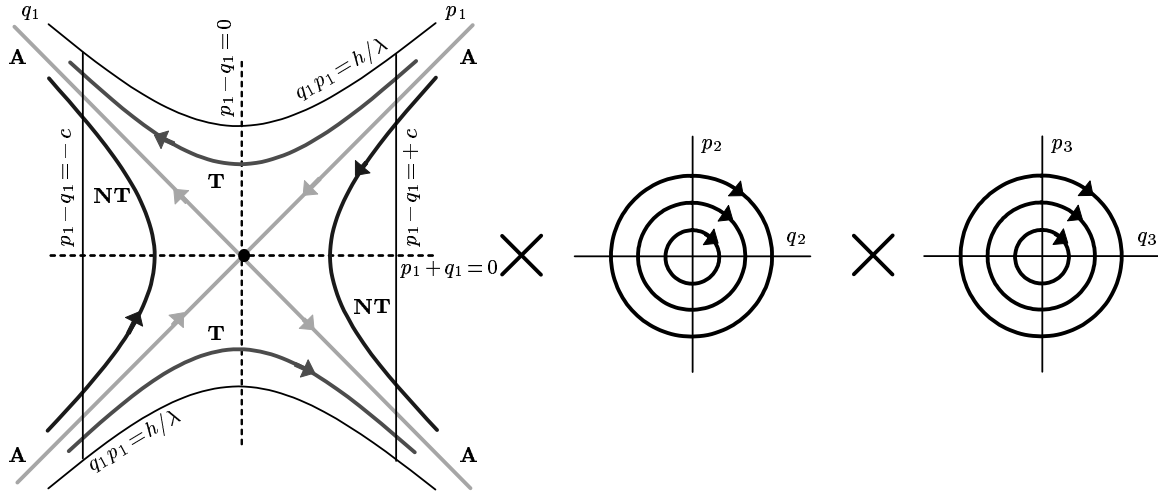


Figure 10: Décomposition du flot Hamiltonien au voisinage du point d'équilibre, l'espace des phases est projeté dans trois plans (p_1, q_1) , (p_2, q_2) et (p_3, q_3) . Le flot a la forme selle \times centre \times centre *adapté de [9]*

Considérons les projections des solutions (57) dans le plan (q_1, p_1) , et dans l'espace $(q_2, p_2) \times (q_3, p_3)$. Sur la figure 10, on voit dans le premier espace, l'image typique d'un point instable. Dans la classification de Poincaré, il correspond à un point de selle ou point hyperbolique. Dans les deux projections du deuxième espace, on voit deux oscillateurs découplés. Poincaré appelle ce genre de point, point elliptique ou centre. On peut résumer le comportement du point d'équilibre par la forme

selle \times centre \times centre

Sur le premier schéma de la figure 10 représentant le plan (q_1, p_1) , les axes sont tournés à 45° , pour une meilleure interprétation physique. En effet, même si l'on se trouve dans l'espace des phases, cette représentation est à rapprocher des hyperboles de la figure 9. La projection de R dans le premier plan est limitée sur deux côtés par les branches d'hyperboles d'équation $q_1 p_1 = h/\lambda$ et par les segments d'équation $p_1 - q_1 = \pm c$.

Comme $q_1 p_1$ est une intégrale des équations, la projection des trajectoires (57) dans le plan (q_1, p_1) , donne des branches d'hyperboles correspondant à $q_1 p_1 = \text{constante}$, à part dans le cas $q_1 p_1 = 0$, où l'on obtient des segments de droite dans les directions p_1 et q_1 . Pour bien comprendre la figure 10, il faut remarquer que chaque point de la projection dans le plan (q_1, p_1) correspond une hypersphère S^3 de dimension 3 dans l'espace $(q_2, p_2) \times (q_3, p_3)$, d'équation.

$$\frac{\omega}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\nu}{2}(q_3^2 + p_3^2) = h - \lambda p_1 q_1$$

La taille de l'hypersphère-3 dépend du point (q_1, p_1) considéré. Elle se réduit à un point à la limite $q_1 p_1 = h/\lambda$.

On va séparer les orbites en neuf classes groupées dans les quatre catégories suivantes

- (i) Le point $p_1 = q_1 = 0$ correspond à l'hypersphère invariante S_h^3 de dimension 3 des orbites bornées dans R . Son équation est

$$\frac{\omega}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\nu}{2}(q_3^2 + p_3^2) = h, \quad p_1 = q_1 = 0$$

On retrouve ci les orbites de Lissajous présentées dans la section précédente. Elles remplissent un espace à 4 dimension dans l'espace des phases complet. La condition $H_2 = h$, donne une hypersphère de dimension 3 dans R .

- (ii) Les quatre demi-droites sur les axes, $p_1 q_1 = 0$, correspondent à quatre cylindres d'orbites asymptotiques à l'hypersphère invariante S_h^3 . Ces orbites tendent vers S_h^3 soit quand le temps augmente ($q_1 = 0$) et elles forment les variétés stables de S_h^3 , soit quand le temps diminue ($p_1 = 0$) et elles forment les variétés instables de S_h^3 . Les variétés stables de S_h^3 sont déterminées par

$$\frac{\omega}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\nu}{2}(q_3^2 + p_3^2) = h, \quad q_1 = 0$$

et les variétés instables de S_h^3 , sont déterminées par

$$\frac{\omega}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\nu}{2}(q_3^2 + p_3^2) = h, \quad p_1 = 0$$

Ces variétés invariantes du problème se présentent sous la forme "tubes" à 4-dimension ($S^3 \times \mathbb{R}$). Les variétés instables et stables sont formées chacune de 2 "tubes" de sens opposés qui convergent et divergent, respectivement, de S_h^3 . Les variétés asymptotiques sont notées **A** sur la figure 10.

- (iii) Les branches d'hyperboles d'équation $q_1 p_1 = \text{constante} > 0$ correspondent à deux cylindres d'orbites qui traversent R d'une limite à l'autre de l'espace, en restant dans le même hémisphère, de $p_1 - q_1 = c$ à $p_1 - q_1 = -c$ dans l'hémisphère nord ou le contraire, dans l'hémisphère sud. On appelle ces orbites, orbites de transit et elles sont notées **T** sur la figure 10.
- (iv) Les branches d'hyperboles d'équation $q_1 p_1 = \text{constante} < 0$ correspondent à deux cylindres d'orbites qui vont d'un hémisphère à l'autre de l'espace R . Si $q_1 > 0$, alors elles vont du sud au nord, si $q_1 < 0$, c'est le contraire. On appelle ces orbites, orbites de non-transit et elles sont notées **NT** sur la figure 10.

3 Transferts

A partir de ce chapitre, nous allons nous concentrer sur l'aspect de missions vers les points de Lagrange. La particule considérée jusqu'à présent comme troisième corps du problème devient une sonde ou un satellite artificiel dans le champ gravitationnel de deux planètes. Le premier problème est d'atteindre les orbites décrites dans le chapitre précédent. Nous étudierons d'abord les transferts vers ces orbites et au départ de ces orbites dans la section 3.2, puis les changements d'orbites autour du même point de Lagrange dans la sections 3.3. Pour l'étude de ces mouvements, nous allons définir la matrice de monodromie et revenir sur les concepts de variétés stables et instables de la section 2.4

3.1 Matrice de Monodromie, Variétés stable et instable

Dans l'étude des transferts, les orbites ciblées (ici orbites de Lissajous) sont utilisées comme référence pour explorer l'espace des phases. Il est possible d'exploiter le caractère hyperbolique des points de Lagrange pour générer des trajectoires de transferts. La procédure de calcul des variétés stables et instables associées à une orbite de Lissajous particulière, est basée sur l'accès à la matrice de monodromie de cette orbite. La matrice de monodromie est un outil, souvent utilisé dans l'analyse de la stabilité d'une solution périodique d'un problème stable qui donne aussi la géométrie de l'espace autour de cette solution. On appelle $\bar{\mathbf{x}}$ solution quasi périodique (orbite de Lissajous) de période T , du problème

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (58)$$

avec $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. La stabilité de $\bar{\mathbf{x}}$ se manifeste dans le comportement des trajectoires avoisinantes. Notons les trajectoires des équations différentielles $\phi(t, \mathbf{x}_0)$. Une trajectoire qui part d'un état perturbé $\bar{\mathbf{x}}_0 + \delta\mathbf{x}_0$ garde une distance $\delta\mathbf{x}(t)$ à l'orbite périodique $\bar{\mathbf{x}}(t)$

$$\delta\mathbf{x}(t) = \phi(t, \bar{\mathbf{x}}_0 + \delta\mathbf{x}_0) - \phi(t, \bar{\mathbf{x}}_0)$$

après une période, la distance devient

$$\delta\mathbf{x}(T) = \phi(T, \bar{\mathbf{x}}_0 + \delta\mathbf{x}_0) - \phi(T, \bar{\mathbf{x}}_0)$$

En développant cette expression en série de Taylor

$$\delta\mathbf{x}(T) = \frac{\partial\phi(T, \bar{\mathbf{x}}_0)}{\partial\mathbf{x}_0} \delta\mathbf{x}_0 + \dots$$

On voit que la matrice $\frac{\partial\phi(T, \bar{\mathbf{x}}_0)}{\partial\mathbf{x}_0}$ détermine si la perturbation va augmenter ou décroître donc renseigne sur la stabilité du système. Cette matrice est appelée matrice de monodromie, on la notera $M(\bar{\mathbf{x}}_0)$ ou $M(t_0)$. On peut montrer que les valeurs propres de $M(t)$ sont constantes et que la stabilité de l'orbite est déterminée par ces valeurs propres que l'on appelle aussi multiplicateurs de Floquet. Si elle en possède un seul dont le module est supérieur à 1 alors le système est instable. Les valeurs propres de M donne aussi le comportement des solutions dans le voisinage des solutions périodiques.

Les matrices de monodromie des orbites de Lissajous du problème à trois corps restreint ont des caractéristiques communes. Leurs valeurs propres sont connues pour être de la forme,

$$\lambda_1 > 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} < 1, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 1, \quad \lambda_5 = \lambda_6^* \quad |\lambda_5| = 1$$

En les regroupant par paires, leur signification géométrique est la suivante

- (i) La première paire (λ_1, λ_2) avec $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ décrit le caractère hyperbolique de la solution périodique. $\lambda_1 \approx 1500$ est associée à la caractéristique instable. Le vecteur propre $\mathbf{e}_1(t)$ associé à cette valeur donne la direction de divergence. A partir de chaque point de l'orbite de Lissajous, si l'on propage le vecteur $\mathbf{e}_1(t)$ avec le vecteur tangent à l'orbite, la somme des trajectoires obtenues est la variété instable associée à l'orbite de Lissajous. D'une façon semblable, $\mathbf{e}_2(t)$ vecteur propre associé à λ_2 est utilisé pour calculer la variété instable par intégration inverse.
- (ii) La deuxième paire (λ_3, λ_4) est associée aux modes neutres. Le vecteur propre $\mathbf{e}_3(t)$ est le vecteur tangent à l'orbite. L'autre valeur propre λ_4 est associée à la direction de la famille des orbites de Lissajous. Elle n'est pas tout à fait égale à 1 car il y a une variation d'énergie (ou de période) le long de la famille .
- (iii) Le troisième couple (λ_5, λ_6) est formé de deux complexes conjugués de module un. La propagation des deux vecteurs associé donne essentiellement une oscillation autour du plan $z = 0$.

Dans les faits les orbites périodiques sont les seules pour lesquelles la matrice de monodromie est définie donc dans le cadre du problème à trois corps, les orbites de halo et de Lyapunov. Néanmoins, pour les orbites quasi-périodiques entourant les orbites de halo et même pour les orbites de Lissajous, les variétés stable et instable subsistent. C'est une généralisation du résultat obtenu dans le cas linéaire pour la variété invariante des orbites bornées.

Revenons sur le calcul des variétés stables et instables d'une orbite de Lissajous. En un point fixe, il existe donc des variétés stables et instables locales W_{loc}^s et W_{loc}^u tangentes aux vecteurs propres associés.

Commençons par la variété stable. Pour un point fixe $\bar{\mathbf{x}}^h$ pris le long de l'orbite de Lissajous, la variété stable W^s est approximée par le vecteur propre $\mathbf{e}_2(\bar{\mathbf{x}}^h)$ associé à la valeur propre λ_2 . La variété stable issue du point fixe $\bar{\mathbf{x}}^h$ peut être décomposée en deux sous-variétés W^{s+} et W^{s-} . Chaque sous-variété est également une variété qui est constituée d'une seule trajectoire. On peut obtenir chacune de ces variétés si on a un point sur la trajectoire \mathbf{x}_0 , en intégrant en avant et en arrière. Pour obtenir ce point, on utilise l'approximation linéaire de W^{s+} près du point fixe $\bar{\mathbf{x}}^h$, c'est-à-dire le vecteur $\mathbf{e}_2(\bar{\mathbf{x}}^h)$. La position du troisième corps est déplacée de l'orbite de Lissajous d'une distance d_l dans la direction de $\mathbf{e}_2(\bar{\mathbf{x}}^h)$ de sorte que le point générateur de la variété stable $\mathbf{x}_0^{W^s}$ est calculé par

$$\mathbf{x}_0^{W^s} = \bar{\mathbf{x}}^h + d_l \mathbf{e}_2(\bar{\mathbf{x}}^h)$$

Pour obtenir la variété stable, il faut intégrer numériquement à l'envers à partir de ce point. Il existe des expressions d'ordre supérieur de $\mathbf{x}_0^{W^s}$ mais elles ne sont pas nécessaires. Il suffit que d_l soit suffisamment petit pour ne pas violer l'estimation linéaire, cependant la distance ne doit pas être trop petite pour ne pas que le temps d'approche asymptotique soit trop long. Dans le cas du système Soleil-Terre, nous utilisons une valeur de 200 km pour d_l . Dans le cas de la variété stable, la même méthode est utilisée mais dans la dernière étape, il faut intégrer à l'endroit. Pour obtenir la variété stable de toute l'orbite de Lissajous, il faut considérer chaque point de la trajectoire comme un point fixe et calculer sa variété stable. Sur la figure 11, on a représenté 40 trajectoires, variétés stables W^{s+} associées à 40 points fixes, obtenues par intégration inverse. Elles donnent un aperçu de la variété stable associée à toute l'orbite de Lissajous. En fait, la surface tubulaire de la figure 11 n'est qu'une projection dans l'espace de configuration (x, y, z) de dimension 3 d'une surface à 2 dimensions dans l'espace des phases à 6 dimensions, difficilement représentable. Les variétés stables et instables sont symétriques par rapport au plan $z = 0$

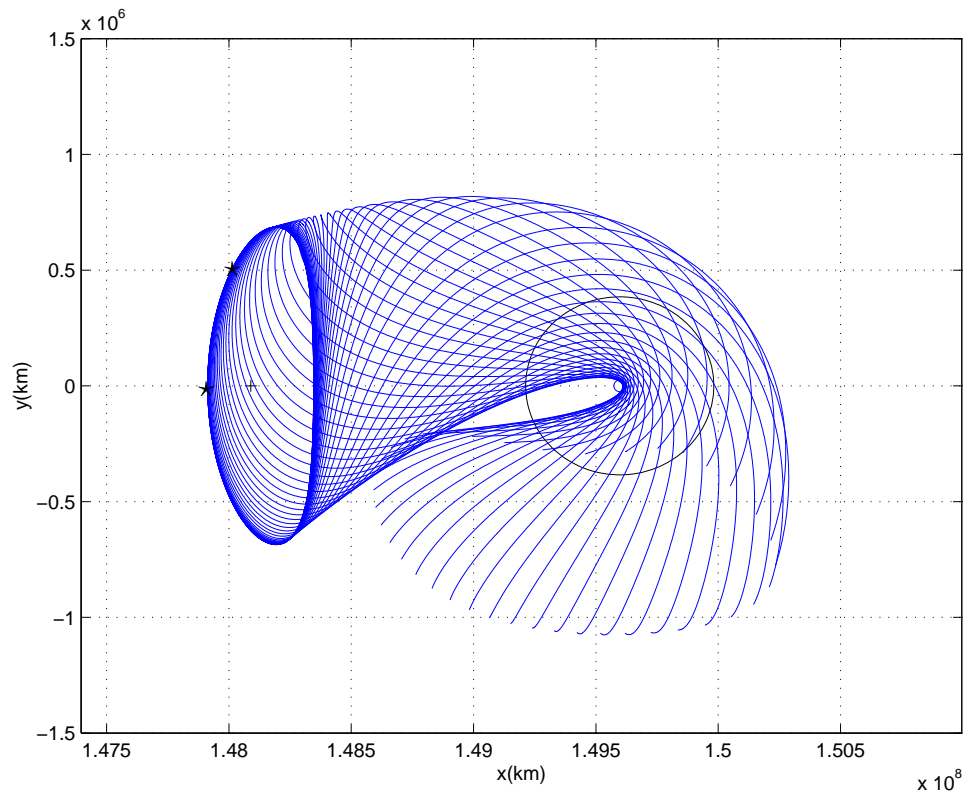


Figure 11: Variété stable d'une orbite de Lissajous de L_1 dans le système Soleil-Terre

3.2 Transfert de la Terre vers un point de Lagrange

Sur la figure 11, on voit qu'un certain nombre de trajectoires de la variété stable passent près de la Terre, ces courbes proviennent des variétés stables issues d'un ensemble de points d'une partie spécifique de l'orbite de Lissajous. Cette région de la courbe est l'arc le plus court délimité avec des \star sur la figure 11. Toutes les variétés stables W^{s+} des points fixes de cette partie de l'orbite de Lissajous passent près de la Terre. Nous appellerons cette région, la région EA (Earth Access) comme dans [1]. Il est à noter que la région EA est fortement corrélée avec la valeur de d_i choisie. La somme de toutes les variétés stables des points de EA donne une variété de dimension 2, incluse dans le cylindre de la variété stable de l'orbite de Lissajous. Une vue trois dimensions de cette variété est représentée sur la figure 12, le changement de couleur représente de la variation de temps. Au voisinage de la Terre, les trajectoires sont très rapides et elles ralentissent au fur et à mesure qu'elles convergent asymptotiquement vers l'orbite de Lissajous.

Sur cette figure, il faut aussi voir que la surface représentant la variété est très fine près de l'orbite de Lissajous alors qu'elle est très large entre la Terre et l'orbite finale. Pour le calcul d'une trajectoire de transfert, la largeur de cette portion semble suggérer qu'il serait plus facile de viser un état dans la variété stable avant l'orbite de Lissajous plutôt qu'un point de l'orbite finale car un domaine de points plus large est accessible. La forme de la variété au voisinage de la Terre donne beaucoup d'options en inclinaison et altitude pour insérer directement le satellite sur la variété stable d'une orbite particulière. La même analyse pour la variété instable conduit à l'identification de trajectoires de retour sur Terre. Tous les résultats obtenus grâce à la figure 12 sont généralisable pour toutes les orbites de Lissajous.

Pour les premières missions (ISEE-3) visant des orbites autour des points de Lagrange [6], la méthode utilisée était ce que l'on appelle dans la littérature la "shooting method", où l'on

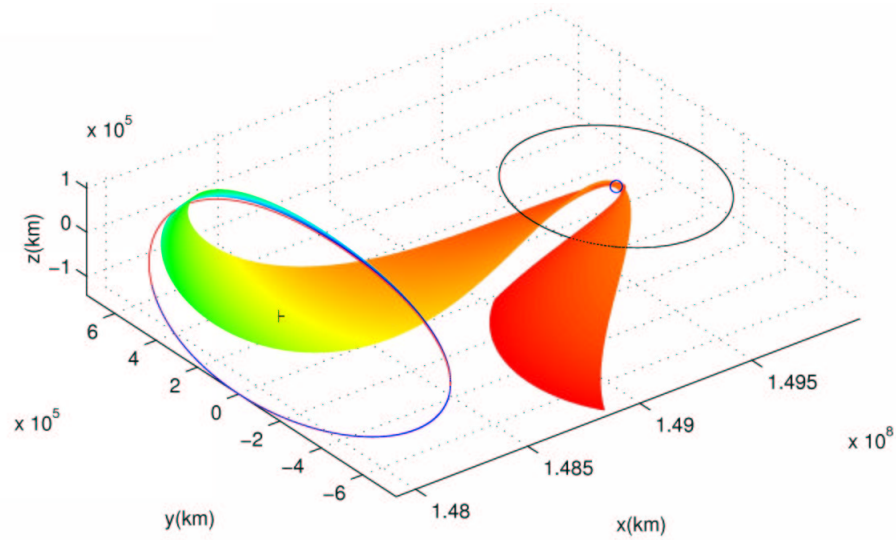


Figure 12: Visualisation d'une partie de la variété stable (issue de la région EA) d'une orbite de Lissajous de L_1 dans le système Soleil-Terre

choisit des conditions de départ de la Terre, on propage l'état, par itération, on ajuste l'état initial pour obtenir une trajectoire qui converge vers une orbite autour du point de Lagrange visé. Le problème est que l'on ne possède pas d'expression analytique pour calculer la valeur de l'état qui initialise la méthode et, du fait de la sensibilité de l'orbite de Lissajous par rapport aux conditions de départ, on ne peut choisir réellement les paramètres de l'orbite d'arrivée.

Grâce à l'analyse de la variété stable d'une orbite particulière, la trajectoire qui passe le plus près de la Terre est identifiée et utilisée comme première approximation de la trajectoire de transfert. A partir de cette trajectoire, la trajectoire de transfert est obtenue par correction différentielle pour obtenir les bons paramètres de départ et d'arrivée. On calcule ainsi, généralement deux manoeuvres, la manoeuvre d'injection ΔV_{inj} à partir d'une orbite de stationnement terrestre puis une manoeuvre d'insertion ΔV_{ins} pour obtenir la trajectoire. On remarque que plus l'orbite visée est grande, plus la variété passe près de la Terre et plus les manoeuvres d'injection et d'insertion sont petites.

Deux stratégies peuvent être adoptées pour ΔV_{ins} , la technique d'insertion sur l'orbite de Lissajous LOI (Lissajous Orbit Insertion) et la technique d'insertion sur la variété de l'orbite MOI (Manifold Orbit Insertion) suivant les notations introduites dans [23]. Pour la technique LOI, un point d'insertion sur l'orbite de Lissajous est fixé, la manoeuvre ΔV_{ins} est faite à ce point. Pour le problème MOI, la deuxième manoeuvre est une insertion dans la variété stable de l'orbite de Lissajous visée. Ensuite, le satellite converge tout seul vers sa trajectoire finale, il n'y a donc pas de manoeuvre d'insertion sur l'orbite de Lissajous. La manoeuvre ΔV_{ins} est faite sur l'une des intersections de la trajectoire de transfert avec la variété stable. Les figures 13 et 14 donnent des exemples de transfert utilisant les technique LOI et MOI.

Des valeurs typiques de ΔV_{inj} sont 3.21 km/s à partir d'une orbite de stationnement à 200 km d'altitude et 740 m/s à partir une orbite de transfert géostationnaire GTO. Il est à noter que le ΔV_{inj} nécessaire pour aller vers un point de Lagrange est moins grand que celui nécessaire pour circulariser l'orbite et obtenir une orbite géostationnaire GO. La précision exigée sur la manoeuvres d'injection pour atteindre de telles trajectoires est, en fait, impossible à atteindre pratiquement. L'erreur d'injection fait qu'une autre manoeuvre peu après le départ de la Terre est nécessaire. Les références [23] et [10] traitent de ce problème. Cette manoeuvre de correction est proportionnelle à l'erreur commise lors de l'injection et au temps écoulé depuis l'injection. Plus la correction est faite tard, plus elle est importante.

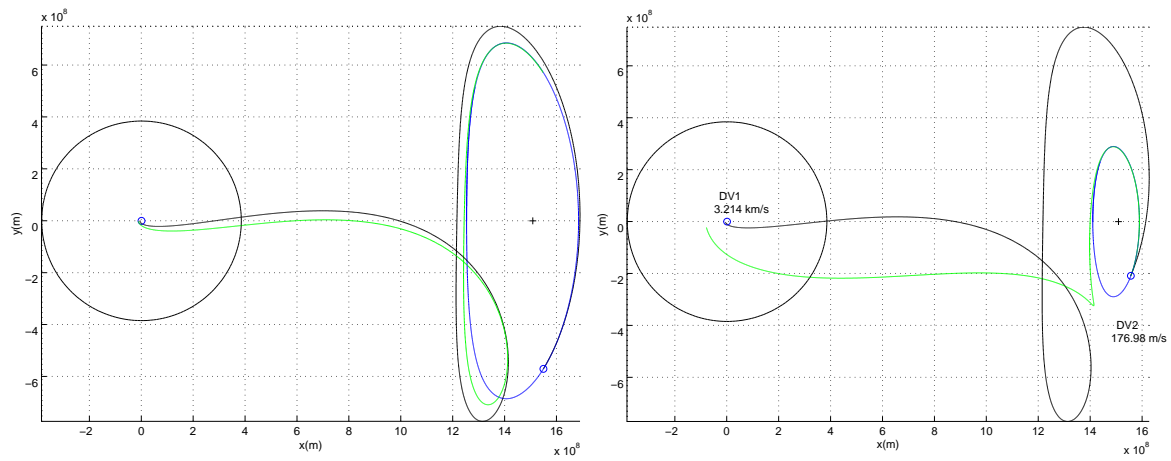


Figure 13: Transfert de la Terre vers une grande orbite de Lissajous et une moyenne Lissajous autour du point L_2 à partir d'une orbite de stationnement circulaire à 200 km d'altitude (utilisation de la technique LOI) $\Delta V_{ins} = 31.35$ m/s et 176.98 m/s

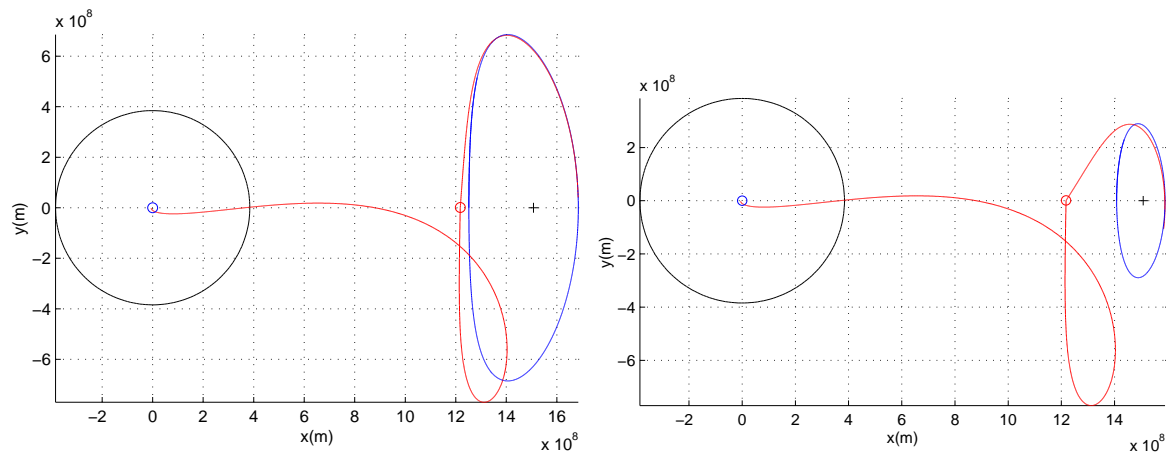


Figure 14: Transfert de la Terre vers une grande orbite de Lissajous et une moyenne Lissajous autour du point L_2 à partir d'une orbite de stationnement GTO (utilisation de la technique MOI) $\Delta V_{ins} = 30.6$ m/s et 172.2 m/s

Comme on le voit sur les figures de droite, pour les petites orbites de Lissajous, la trajectoire dans la variété stable qui passe au plus près de la Terre est encore assez éloignée et ne donne des informations que sur l'énergie nécessaire pour s'échapper de la Terre, et la direction de la manoeuvre à effectuer. Une des solutions étudiées dans [15] est de faire un swingby par la Lune pour accrocher la variété stable de l'orbite visée. Cela permet de réduire la manoeuvre d'injection d'une cinquantaine de mètres par seconde et la manoeuvre d'insertion de quelques centaines de mètres par seconde à quelques mètres par seconde.

Considérons le problème simplifié plan et prenons comme orbite de référence une orbite de Lissajous paramétrée par $A_x = 100\,000$ km. Sa variété stable est représentée sur la figure 15. Le calcul des vitesses infinies des trajectoires de la variété stable et de trajectoires képlériennes coupant l'orbite lunaire, montre que les seules possibilités pour accrocher la variété stable après un swingby sont sur l'arc marqué par des ronds, les altitudes de survol de la lune allant de 6000 à 13000 km. La trajectoire la plus foncée sur la figure 15 est un exemple de transfert avec aide gravitationnelle lunaire vers L_2 , les première boucles près de la Terre représentent une orbite elliptique terrestre qui servent pour le phasage avec la lune.

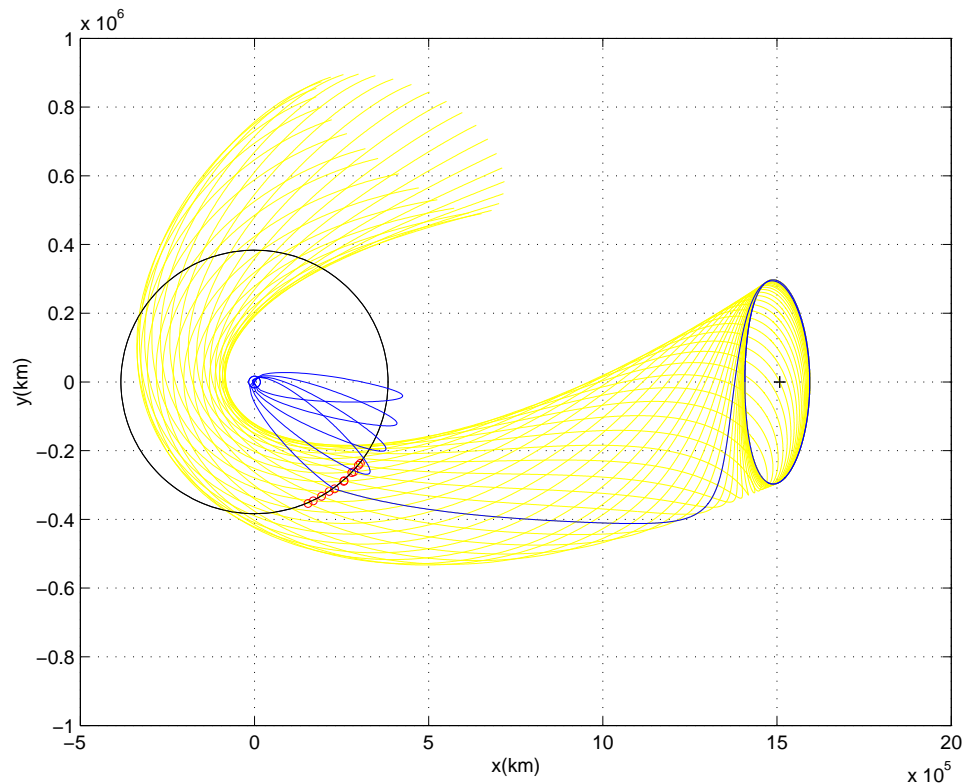


Figure 15: Transfert de la Terre vers une orbite de Lissajous utilisant l'assistance gravitationnelle de la Lune

3.3 Transfert entre orbites

Parfois les contraintes de mission et de lancement font que les satellites n'arrivent pas sur la trajectoire désirée. Les satellites Hershell et Planck de l'ESA en sont un parfait exemple. Ils seront lancés ensemble lors d'un lancement double prévu en 2007, Hershell, avec pour objectif une orbite de Lissajous autour de L_2 et Planck, une orbite de Lissajous deux fois plus petite que celle de Hershell. Les deux satellites vont suivre la même trajectoire de transfert vers l'orbite de Lissajous. Une fois arrivé sur cette orbite, Planck fera un transfert vers son orbite. Cette section s'intéresse au calcul de ce transfert.

La théorie des systèmes dynamiques va encore apporter la réponse à ce problème, grâce à la variété stable associée à l'orbite d'arrivée. On se place de nouveau dans le cas plan pour une meilleure visualisation. La figure 16 nous montre la variété stable complète d'une orbite de Lissajous ($A_x = 100\,000\text{km}$) faite des deux demi-tubes W^{s+} et W^{s-} convergeant en sens opposé. Si l'on considère une trajectoire de départ plus grande que celle d'arrivée comme sur la figure de gauche, on voit que l'insertion sur la variété d'arrivée ne peut se faire qu'à partir de deux arcs d'intersection de l'orbite de départ. Par contre, dans le cas de droite, où l'on prend une orbite de Lissajous plus petite comme orbite de départ, le transfert peut se faire de n'importe quel point de cette orbite car la variété stable la coupe en tout point. On remarque que contrairement aux orbites terrestres, le transfert se fait en une manoeuvre, qui est la manoeuvre d'insertion sur la variété stable de l'orbite d'arrivée.

Une méthode pour le calcul analytique des manoeuvres de transfert entre orbites de Lissajous a été développée par Cobos et Masdemont [3]. Elle repose sur l'analyse de la géométrie de l'espace des phases linéarisé comme dans la section 2.4. Pendant le transfert, le satellite doit rester sur une variété stable donc éviter tout mouvement instable, ce qui se traduit par $A_1 = 0$ dans la solution linéaire (48) de la section 2.3 pour un point de Lagrange collinéaire. En utilisant la

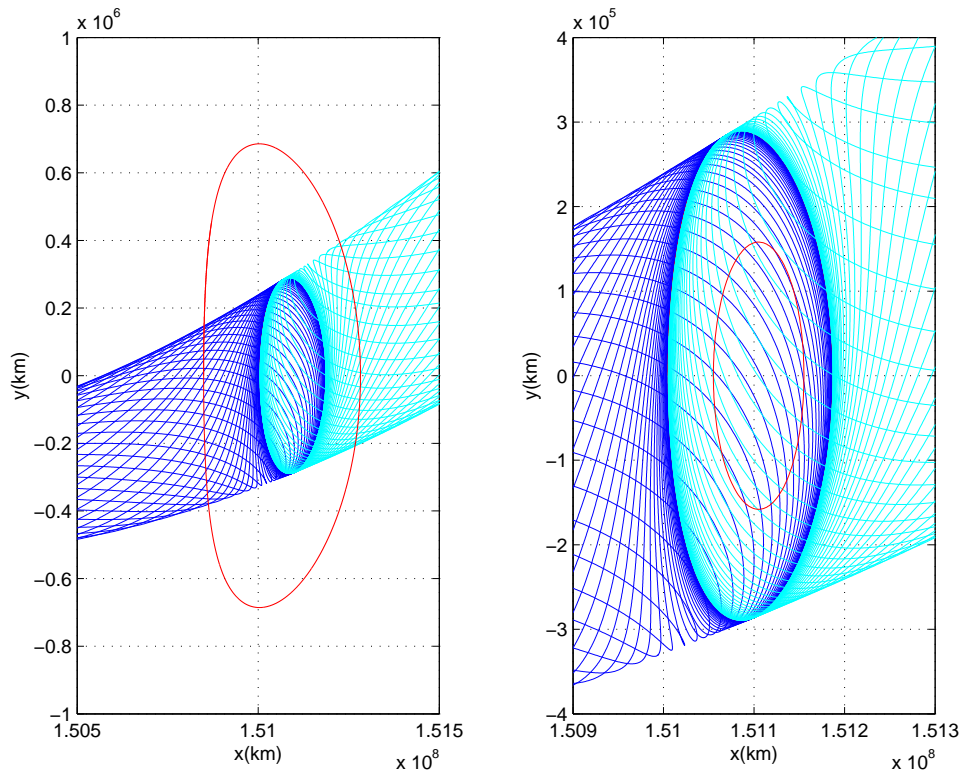


Figure 16: Variété stable servant pour le transfert vers une orbite de Lissajous ($A_x = 100\,000\text{km}$), à droite à partir d'une orbite de Lissajous ($A_x = 220\,000\text{km}$), à gauche à partir d'une orbite de Lissajous ($A_x = 50\,000\text{km}$)

premières ligne des relations (49), on obtient

$$\frac{k}{b_2} \dot{\tilde{x}} - \frac{1}{b_1} \dot{\tilde{y}} = \frac{k\omega}{b_1} \tilde{x} + \frac{\omega}{b_2} \tilde{y}$$

pour tout point de la trajectoire. Supposons maintenant que l'on vérifie la relation $A_1 = 0$ en étant sur une orbite de Lissajous. Si l'on veut rester sur une trajectoire stable après avoir fait une manoeuvre dans le plan $(\Delta\tilde{x}, \Delta\tilde{y})$ il faut qu'elle satisfasse la condition suivante

$$\frac{k}{d_2} \Delta\dot{\tilde{x}} - \frac{1}{b_1} \Delta\dot{\tilde{y}} = 0$$

ce qui signifie que la manoeuvre doit se faire perpendiculairement au vecteur $(\frac{-k}{b_2}, \frac{1}{b_1})$, qui définit la "escape direction". La manoeuvre est dirigée suivant le vecteur $(\frac{1}{b_1}, \frac{k}{b_2})$, qui définit la "non-escape direction", suivant les appellations de [13].

La manoeuvre de transfert dans le plan aura donc la forme

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{\tilde{x}} \\ \Delta\dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{\sqrt{c^2 + k^2}} \begin{pmatrix} d_2 \\ kd_1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathfrak{R} \quad (59)$$

où $|\alpha|$ est proportionnel² à ΔV . Pour un transfert entre une orbite de Lissajous initiale ayant une amplitude dans le plan $A_x^{(i)}$ à une finale telle que $A_x^{(f)}$ à l'instant t_m , α prend la forme

$$\frac{\alpha}{\omega} = A_x^{(i)} \sin(\omega t_m + \phi - \beta) \pm \sqrt{A_x^{(f)^2} - A_x^{(i)^2} \cos^2(\omega t_m + \phi - \beta)} \quad (60)$$

²attention $|\alpha|$ n'est pas la norme de la manoeuvre

$$\text{où } (\cos \beta, \sin \beta) = \left(\frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}, \frac{-b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \right)$$

On remarque que pour $A_x^{(f)} > A_x^{(i)}$ le transfert est possible pour tout t_m , donc tout au long de l'orbite de départ. Par contre pour $A_x^{(f)} < A_x^{(i)}$ le transfert n'est possible que pour $\omega t_m + \phi - \beta \in [\kappa, \frac{\pi}{2} + \kappa] \pmod{\pi}$ avec $\kappa = \arccos(A_x^{(f)}/A_x^{(i)})$. On retrouve les résultats de la figure 16. Les régions de la courbe de départ à partir desquelles les transferts sont possibles sont les régions où la variété stable plane coupe l'orbite

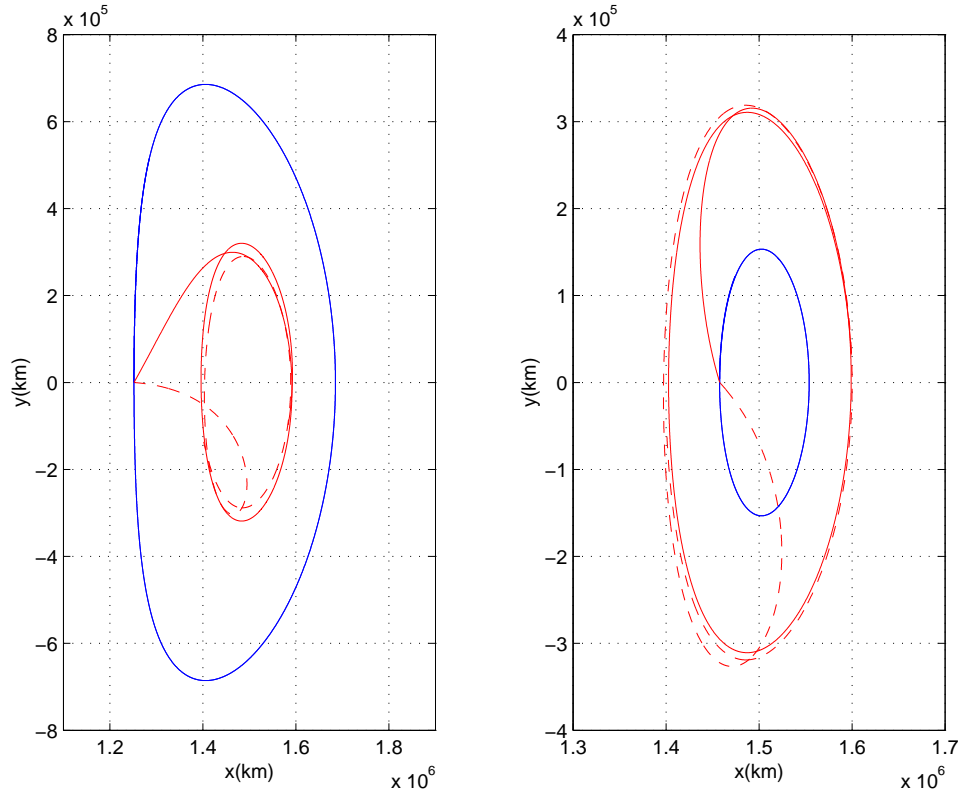


Figure 17: Transfert vers une moyenne orbite de Lissajous ($A_x = 100\,000\text{km}$) depuis une grande orbite de Lissajous ($A_x = 220\,000\text{km}$) $\Delta V = 172,86\text{m/s}$ et $383,55\text{ km/s}$ et depuis une Lissajous ($A_x = 50\,000\text{km}$) $\Delta V = 62,90\text{ m/s}$ et $178,63\text{ m/s}$

Pour un transfert d'une amplitude dans le plan à une autre, on note que deux trajectoires sont possibles. Sur la figure 17, la trajectoire la plus économique est représentée en trait continu et l'autre, qui ne présente que peu d'intérêt, en pointillés.

Pour une manoeuvre incluant un changement d'amplitude hors du plan de $A_z^{(i)}$ à $A_z^{(f)}$, la formule donnant la valeur de $\Delta \dot{z}$ est similaire à celle pour une manoeuvre dans le plan avec $\alpha = \Delta \dot{z}/\nu$ et $\beta = 0$

$$\frac{\Delta \dot{z}}{\nu} = A_z^{(i)} \sin(\nu t_m + \psi) \pm \sqrt{A_z^{(f)2} - A_z^{(i)2} \cos^2(\nu t_m + \psi)} \quad (61)$$

L'approximation linéaire donne de bons résultats pour les transferts entre petites orbites de Lissajous mais ne donne qu'un ordre d'idée de la manoeuvre à effectuer pour les orbites plus grandes. Dès que l'on se place dans le modèle complet, les directions privilégiées de manoeuvres ne sont plus exactes donc l'orbite de transfert diverge de son but. Une correction suivant la non-escape direction, comme expliqué dans la section 4.2 est nécessaire pour la stabiliser. Le

lecteur pourra trouver différentes méthodes de calcul de transfert qui incluent les non-linéarités dans les références [14] et [11], qui s'intéresse particulièrement aux transferts entre orbites de halo.

4 Stratégies de maintien à poste

Les différents moyens pour atteindre et partir d'un point de Lagrange ayant été étudiés dans le chapitre précédent, il faut maintenant déterminer quelle orbite répond aux contraintes de la mission et comment maintenir la sonde sur l'orbite choisie en réalisant un maintien à poste. Dans la première section, nous allons présenter les différents avantages et inconvénients des points de Lagrange L_1 et L_2 des systèmes Terre-Lune et Soleil-Terre. Dans les sections suivantes, nous présenterons une méthode empirique de maintien à poste par annulation de composante instable puis deux méthodes modernes de calcul de manoeuvres, l'approche par modes de Floquet et l'approche avec points cibles.

4.1 Choix de l'orbite

Les points de Lagrange ont de nombreuses propriétés idéales pour des missions spatiales scientifiques ou de télécommunication. Le point de Lagrange L_1 du système Soleil-Terre est un site idéal pour l'observation du Soleil ou des interactions Soleil-Terre. Le satellite peut continuellement observer le Soleil car sa surface est visible en permanence. La Terre est assez loin pour qu'elle ne perturbe pas les mesures (magnétiques, électriques,...) mais assez proche pour permettre une bonne communication et donner des mesures qui peuvent être comparées à celles prises plus près de la Terre. Le problème du point L_1 est justement qu'il est situé près de l'axe Terre-Soleil. Si le satellite passe dans un cône près de cet axe ("exclusion zone" [7]), ces signaux de communication se perdent dans le bruit solaire. La solution trouvée pour ISEE-3 en 1978 est de mettre le satellite sur une orbite de halo avec une amplitude (A_z) suffisante pour éviter la zone d'exclusion. Les orbites de Lissajous sont exclues car leur quasi-périodicité fait que le satellite finira par passer dans la zone d'exclusion. L'observatoire solaire SOHO, lancé en 1995, fut la première mission à utiliser une orbite de halo pour photographier et étudier le Soleil sans interruption.

Le point L_2 peut aussi être utilisé pour observer le Soleil mais de nombreux projets de missions d'observation de l'univers vers L_2 ont vu le jour récemment. Sur ce point, il y a plus de zone d'exclusion du au bruit solaire mais des éclipses avec les ombres de la Terre ou de la Lune peuvent couper le satellite de sa source de courant pour plusieurs heures. Deux solutions sont possibles, soit le satellite est placé sur une orbite de halo qui ne passe jamais dans les zones d'ombre des deux corps, soit il est placé sur une orbite de Lissajous et une à deux manoeuvres sont réalisées pour éviter les cônes d'ombre. La deuxième solution a été retenue pour les futurs télescopes de la NASA et l'ESA, le James Webb Space Telescope (JWST), Hershell et Planck.

Les agences spatiales sont aussi très intéressées par L_2 pour des missions de vol en formation. En effet, le gradient de gravité étant très faible dans le voisinage des points de Lagrange, le contrôle relatif précis peut être obtenu. La taille des télescopes spatiaux est limitée par des problèmes de structure et de coût de mise à poste. Les projets de missions futures prévoient de répartir différentes parties du télescope sur plusieurs satellites séparés de quelques mètres à quelques milliers de kilomètres, tout en contrôlant la séparation entre les satellites à quelques centimètres comme sur MAXIM. Un contrôle encore plus précis de la mesure permet de distribuer le miroir en plusieurs collecteurs. L'image finale est ensuite calculée grâce à l'interférométrie. Des projets comme DARWIN prévoit une résolution 100 à 1000 fois meilleure que Hubble.

Les points de Lagrange du système Terre-Lune n'ont jamais encore été utilisés. Une idée intéressante de l'utilisation du point L_2 développée dès le début des années 70 par Farquhar, est de placer un satellite de communication sur une orbite de halo autour de ce point pour établir un lien permanent entre la Terre et la face cachée de la Lune. Malheureusement, il a été trouvé récemment que des résonances avec la période du Soleil détruisaient beaucoup de solutions

en orbite de halo du système. Une autre idée développée par Lo [17] est d'utiliser ces points pour faire des missions de maintenance sur les télescopes aux points de Lagrange du système Soleil-Terre. Les énergies des points des deux systèmes étant très proches, le transfert vers le système Terre-Lune serait peu coûteux et la mission de maintenance deviendrait possible car elle nécessiterait un trajet beaucoup moins long que vers L_2 du système Soleil-Terre. Après la maintenance, le télescope serait replacé sur son orbite d'origine.

4.2 Annulation de la composante instable

Comme nous l'avons expliqué dans les sections précédentes, quelle que soit l'orbite nominale choisie, le mouvement sera instable et des manoeuvres de maintien à poste seront nécessaires pour maintenir le satellite sur son orbite. Heureusement ces manoeuvres ne seront pas nécessaires très souvent et le coût de maintenance sera faible ($<1\text{m/s}$ par an). Une stratégie de contrôle pourrait être d'éliminer la différence entre l'orbite réelle observée et une orbite nominale calculée. En automatique, cela correspondrait à faire un système asservi sur une commande qui est l'orbite nominale. Le ΔV dépendrait de la précision avec laquelle on a calculé l'orbite nominale, le modèle dynamique doit être le plus précis possible. Une possibilité pour réduire le ΔV est d'adopter un contrôle lâche où l'orbite nominale n'est pas connue précisément. La méthode qui semble la plus économique [13] est l'annulation de la composante instable suivant l'échappée direction linéaire (voir section 3.3).

L'algorithme de calcul de la manoeuvre est très simple.

- (i) A partir des observations faites de la Terre, on calcule un état estimé présent de la position et de la vitesse du satellite.
- (ii) A l'aide d'un modèle dynamique le plus proche de la réalité, on calcule la position où l'on veut réaliser la manoeuvre.
- (iii) On prend une borne supérieure et inférieure pour la valeur de la manoeuvre suivant l'échappée direction.
- (iv) Par dichotomie, on calcule cette valeur en partant de la moyenne des bornes
 - (a) En intégrant sur 450 jours l'état corrigé après manoeuvre et en s'arrêtant si le satellite s'échappe d'un côté ou de l'autre de l'orbite, soit il s'éloigne de la Terre $x - d_2 > 2 \times 10^6\text{km}$, soit il se rapproche de la Terre $x - d_2 < 1 \times 10^6\text{km}$
 - (b) Si une des conditions d'arrêt est atteinte, elle donne un renseignement sur la correction à apporter à la borne inférieure ou supérieure. On recalcule la manoeuvre en prenant de nouveau la moyenne des bornes et on répète (a).
 - (c) Si les conditions d'arrêt ne sont pas atteintes, nous avons trouvé la manoeuvre à exécuter.

Cette stratégie est très performante et a une propriété qui peut servir pour le design du satellite. Toutes les manoeuvres seront alignées ou opposées à une direction constante, celle de l'échappée direction linéaire qui forme un angle de 28.6° avec la ligne joignant la Terre au Soleil.

L'exécution des manoeuvres de maintien à poste doit répondre à certaines contraintes. Le temps entre deux manoeuvres ne doit être pas trop court pour permettre de déterminer précisément l'état du satellite après l'exécution de la première manoeuvre mais ne doit pas être trop long pour que la composante instable ne soit pas grande. Dans ce dernier cas, le coût du maintien à poste serait plus important. Les durées entre deux manoeuvres varient entre 1 à 3 mois suivant les missions. Une fois le ΔV calculée par l'algorithme précédent, une autre

contrainte s'applique sur la magnitude de la manoeuvre. Si la manoeuvre n'atteint pas un minimum spécifié en fonction des dispositifs de maintien à poste et d'orbitographie, elle n'est pas exécutée.

L'inconvénient de cette méthode est l'absence de contrôle par rapport à une orbite nominale. L'évolution de l'orbite à long terme dépend des manoeuvres effectuées. L'orbite peut complètement diverger de son orbite initiale puisque qu'elle ne sert pas de référence. Les autres modes qui ne sont pas contrôlés peuvent faire grandir l'orbite jusqu'à la perte des propriétés recherchées avec l'orbite initiale et même perte de contrôle. Il faut quand même remarquer que ce phénomène n'apparaît que pour des périodes supérieures à la durée habituelle des missions spatiales.

4.3 Approche par modes de Floquet

Dans la section précédente, le calcul de la manoeuvre d'annulation de la composante instable était empirique. Simó [24] a développé une méthode pour la calculer de façon semi-analytique grâce aux modes de Floquet. Ils vont permettre de déterminer la composante instable du vecteur erreur $\delta(t) = (\delta x, \delta y, \delta z, \delta \dot{x}, \delta \dot{y}, \delta \dot{z})$, défini comme la différence entre l'orbite réelle et l'orbite nominale. Les modes de Floquet $\bar{\mathbf{e}}_i(t)$ sont calculés à partir des vecteurs propres $\mathbf{e}_i(t)$ de la matrice de monodromie

$$\bar{\mathbf{e}}_i(t) = \mathbf{e}_i(t) \exp(-t/T \log \lambda_i), \quad i \in [1, 6] \quad (62)$$

le vecteur erreur se décompose en modes de Floquet

$$\delta(t) = \sum_{i=1}^6 \sigma_i \bar{\mathbf{e}}_i(t) \quad (63)$$

où σ_i est une constante.

Si l'on définit le vecteur π avec la relation $\delta \cdot \pi = \sigma_1$, on voit que pour annuler la composante instable avec une manoeuvre $\Delta V = (0, 0, 0, \Delta \dot{x}, \Delta \dot{y}, \Delta \dot{z})^T$, il faut que $(\delta + \Delta V) \cdot \pi = 0$, ce qui donne

$$\Delta \dot{x} \pi_4 + \Delta \dot{y} \pi_5 + \Delta \dot{z} \pi_6 + \sigma_1 = 0 \quad (64)$$

où π_4, π_5 et π_6 sont les trois dernières composantes de π . En prenant un contrôleur dans le plan et en minimisant la norme euclidienne de la manoeuvre, on obtient

$$\Delta \dot{x} = -\frac{\sigma_1 \pi_4}{\pi_4^2 + \pi_5^2}, \quad \Delta \dot{y} = -\frac{\sigma_1 \pi_5}{\pi_4^2 + \pi_5^2} \quad (65)$$

Cette technique reposant sur le calcul de la matrice de monodromie, elle ne peut s'appliquer qu'à une orbite nominale de halo.

Comme la méthode précédente, cette méthode est basée sur l'annulation de la composante instable et le même inconvénient de divergence à long terme apparaît. Ce problème peut être résolu en faisant une manoeuvre d'insertion sur la variété stable de l'orbite nominale. Comme cela, le satellite se rapproche asymptotiquement de son orbite initiale et les manoeuvres d'annulation de composante instable sont moins coûteuses car l'erreur $\delta(t)$ diminue et sa projection sur la composante instable aussi. Les manoeuvres d'insertion sur la variété stable n'ont pas besoin d'être effectuées aussi souvent que les manoeuvres d'annulation de la composante instable. L'insertion sur la variété stable se fait souvent en deux manoeuvres, une pour atteindre un point de la variété dans l'espace des configurations et une fois sur ce point, une manoeuvre pour donner la bonne vitesse.

Le calcul d'une manoeuvre d'insertion sur la variété stable de l'orbite désirée pour la mission peut être inclus dans la méthode empirique de la section précédente.

4.4 Points Cibles

Le méthode du maintien à poste par points cibles [16] est complètement différente des précédentes et ne prend pas en compte les directions stable et instable de l'orbite nominale. Son principe est de maintenir le satellite dans une région proche de l'orbite nominale. Cette méthode est basée sur la minimisation d'une fonction coût J qui prend en compte non seulement le poids de l'énergie nécessaire pour le contrôle ΔV mais aussi le poids d'une série de déviations prévues de l'état à 6 dimensions par rapport à l'orbite nominale à des dates futures choisies. Cette fonction coût s'exprime ainsi

$$J = \Delta v^T Q \Delta v + r_1^T R r_1 + v_1^T R_v v_1 + r_2^T S r_2 + v_2^T S_v v_2 + r_3^T T r_3 + v_3^T T_v v_3$$

Les variables de la fonction coût sont le vecteur manoeuvre ΔV et r_1 , r_2 et r_3 qui sont les approximations linéaires des déviations attendues du satellite par rapport à la trajectoire nominale à trois dates choisies arbitrairement dans le futur t_1 , t_2 et t_3 . Les vecteurs v_1 , v_2 et v_3 représentent les déviations en vitesse du satellite au dates t_i . Les matrices 3×3 de la fonction coût Q , R , R_v , S , S_v , T et T_v sont les matrices de poids. La matrice de poids Q , correspondant à l'importance de l'énergie utilisée pour la manoeuvre dans la fonction coût, est symétrique, positive définie, les autres matrices sont positives semi-définies. Le choix des matrices est empirique et la recherche de ces matrices est souvent longue. Howell et Pernicka [16] ont développé un algorithme qui les calcule automatiquement à chaque manoeuvre. Si l'on décompose la matrice d'état-transition $\Phi(t_k, t_0)$ en quatre sous matrices 3×3

$$\delta \mathbf{x}(t_k) = \Phi(t_k, t_0) \delta \mathbf{x}(t_0), \quad \Phi(t_k, t_0) = \begin{pmatrix} A_{k0} & B_{k0} \\ C_{k0} & D_{k0} \end{pmatrix} \quad (66)$$

avec $\delta \mathbf{x} = (r, v)$, le calcul du minimum de la fonction coût donne

$$\begin{aligned} \Delta v &= -[Q + B_{10}^T R B_{10} + B_{20}^T S B_{20} + B_{30}^T T B_{30} + D_{10}^T R_v D_{10} + D_{20}^T S_v D_{20} + D_{30}^T T_v D_{30}]^{-1} \\ &\times [(B_{10}^T R B_{10} + B_{20}^T S B_{20} + B_{30}^T T B_{30} + D_{10}^T R_v D_{10} + D_{20}^T S_v D_{20} + D_{30}^T T_v D_{30}) v_0 \\ &+ (B_{10}^T R A_{10} + B_{20}^T S A_{20} + B_{30}^T T A_{30} + D_{10}^T R_v C_{10} + D_{20}^T S_v C_{20} + D_{30}^T T_v C_{30}) r_0] \end{aligned} \quad (67)$$

où r_0 et v_0 sont les écarts en position et en vitesse du satellite par rapport à l'orbite nominale à l'instant de la manoeuvre. L'avantage de cette méthode est qu'elle ne repose pas sur le calcul de la matrice de monodromie donc elle peut s'appliquer aux orbites quasi-périodique comme les orbites de Lissajous. L'inconvénient de cette méthode est l'obtention des matrices de poids. Une fois obtenues, cette méthode est facile à mettre en place. Les mêmes contraintes opérationnelles que la première méthode s'applique à cette méthode.

References

- [1] B. T. Barden, K.C. Howell, and M.W. Lo. Application of Dynamical System Theory to Trajectory Design for a Libration Point Mission. In *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 1996. AIAA 96-3602.
- [2] E. W. Brown and C. A. Shook. *Planetary Theory*. Cambridge University, Cambridge, 1993.
- [3] J. Cobos and J.J. Masdemont. Astronautical Applications of Invariant Manifold Associated with Collinear Libration Orbits. In *the Libration Point Orbits and Applications conference*, Girona, Spain, 2002.
- [4] D. W. Dunham and R. W. Farquhar. Libration Point Missions, 1978-2002. In *International Conference on Libration Point Orbits and Applications*, Girona, Spain, 2002.
- [5] R. W. Farquhar. The Control and Use of Libration-Point Satellites. Goddard Space Flight Center, NASA TR R-346, 1970.
- [6] R. W. Farquhar, D. P. Muhonen, and C. R. Newman and H. S. Heuberger. Trajectories and Orbital Maneuvers for the First Libration-Point Satellite. *Journal of Guidance and Control*, 1980. Vol.3, No. 6.
- [7] R. W. Farquhar, D. P. Muhonen, and D. L. Richardson. Mission Design for a Halo Orbiter of the Earth. In *AIAA/AAS Astrodynamics Conference*, San Diego, CA, 1976. AIAA 76-810.
- [8] G. Gómez, Á. Jorba, C. Simó, and J. Masdemont. *Dynamics and Mission Design Near Libration Points Volume III: Advanced Methods for Collinear Points*. World Scientific, 2002.
- [9] G. Gómez, W.S Koon, M.W. Lo, J.E. Marsden, J. Masdemont, and S.D Ross. Invariant Manifolds, the Spatial Three-Body Problem and Space Mission Design. In *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, 2001. AAS 01-301.
- [10] G. Gomez, M. Marcote, and J. Masdemont. Trajectory Correction manoeuvres in the Transfer to Libration Point Orbits. <http://www-ma1.upc.es/recerca/>, 2002.
- [11] G. Gómez, J. Masdemont, and C. Simó. Study of the Transfer Between Halo Orbits. *Acta Astronautica*, 1998. No. 43(9-10).
- [12] G. A. Gurzadyan. *Theory of Interplanetary Flights*. Gordon and Breach Publishers, 1996.
- [13] M. Hechler. Herschel/Planck Consolidated Report on Mission Analysis. ESA FP-MA-RP-0010-TOS/GMA Issue 2.0, 2002.
- [14] L. A. Hiday and K. C. Howell. Transfers between Libration-Point Orbits in the Elliptic Restricted Problem. In *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, Colorado, 1992. AAS 92-126.
- [15] K. C. Howell. Transfers to l_1 and l_2 Orbits that Include Lunar Encounters. In *International Conference on Libration Point Orbits and Applications*, Girona, Spain, 2002.
- [16] K. C. Howell and H. J. Pernicka. Stationkeeping Method for Libration Point Trajectories. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1993. Vol. 16 No. 1.

- [17] M. W. Lo and S. D. Ross. The Lunar l_1 Gateway: Portal to the Stars and Beyond. In *AIAA Space Conference*, Albuquerque, New Mexico, 2001.
- [18] C. Marchal. *The Three-Body Problem*. Elsevier, Amsterdam, 1990.
- [19] C. D. Murray and S.F. Dermott. *Solar System Dynamics*. Cambridge University, Cambridge, 1999.
- [20] H. Poincaré. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Gauthier-Villars, Paris, 1892,1893,1899.
- [21] D. L. Richardson. Analytic Construction of Periodic Orbits about the Collinear Points. *Celestial Mechanics*, 22, 1980.
- [22] A. E. Roy. *Orbital Motion*. Adam Hilder Ltd, Bristol, 2nd edition, 1982.
- [23] R. S. Serban, W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden, L. R. Petzold, S. D. Ross, and R. S. Wilson. Halo Orbit Mission Correction Maneuvers Using Optimal Control. *Automatica*, 2002. No. 38.
- [24] C. Simó, G. Gómez, J. Llibre, R. Martínez, and R. Rodríguez. On the Optimal Station Keeping Control of Halo Orbits. *Acta Astronautica*, 1987. Vol. 15, No. 6/7, pp. 391-397.
- [25] V. Szebehely. *Theory of Orbits*. Academic Press, New York, NY, 1967.
- [26] B. Wie. *Space Vehicle Dynamics and Control*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc, Reston, VA, 1998.