

Titre (title) : Commande optimale pour des engins à propulsion électro-ionique sous contrainte d'éclipse (*Optimal control for spacecraft with electro-ionic propulsion under constraint of eclipse*)

Auteurs (Authors) : Christophe FERRIER et Richard EPENYOY du Centre Spatial de Toulouse

Mots clés (Keywords) : Commande optimale *Optimal control*, **Mise à poste** *Positioning*, **Poussée faible** *Low thrust*, **Éclipses** *Eclipses*

Résumé :

Nous nous intéressons ici au calcul de la trajectoire optimale d'un satellite à propulsion électro-ionique, soumis aux éclipses solaires. La modélisation de cette contrainte se traduit par un ensemble de commandes admissibles $U(t,x)$ dépendant discontinûment de l'état du système (la position du satellite). Cet ensemble de commandes ne permet pas d'utiliser le principe de Pontryagin classique (cf.[5, 6]). Nous montrons alors comment "encadrer" ce problème par deux problèmes voisins, construits par changement de variable et lissage, pour lesquels nous donnons des conditions nécessaires d'optimalité. Enfin, nous appliquons ces résultats à la mise à poste de satellite géostationnaire.

Abstract:

We are interested here in the calculation of the optimal low-thrust transfer of a satellite submitted to solar eclipses. The modeling of this constraint leads to a set of admissible controls $U(t, x)$ discontinuously dependent on the time t and on the state of the system x (the satellite's position). This set of controls does not allow to use the classical Pontryagin's principle (see [5, 6]). We show then how to enclose this problem by two neighbor problems. Those problems are built by change of variable and smoothing, they fulfill the assumptions of Pontryagin's principle and their optimal cost function enclose the original problem's one. Finally, we apply these results to the geostationary transfer.

Sommaire

Glossaire	3
1 Introduction	4
2 Formulation du problème	4
2.1 Équation de la dynamique	4
2.2 Modélisation des éclipses	5
2.3 Problème de transfert en temps minimal	6
3 Méthode de lissage	6
3.1 Motivation de la méthode de lissage	6
3.2 Description de la méthode	7
3.3 Propriétés des problèmes lissés	9
4 Résultats numériques	10
4.1 Algorithme	10
4.2 Mise à poste géostationnaire	11
4.2.1 Sans éclipse	11
4.2.2 Éclipse : lancement le 1 ^{er} janvier 1997	12
4.2.3 Éclipse : lancement le 1 ^{er} avril 1997.	14
4.3 Influence des éclipses	15
4.4 Autre transfert orbital.	16
4.4.1 Lancement le 01 02 1997	16
4.5 Vérification par simulation	18
5 Conclusion	19

Glossaire

NAG	Bibliothèque de programmes numériques commercialisée par <i>Numerical Algorithm Group</i> .
GEO	<i>GEostationnary Orbit</i> .
GTO	<i>Geostationnary Transfert Orbit</i> .
MIPELEC	Logiciel de calcul de trajectoires optimales pour les engins à poussée faible, développé par le Cnes.
Poussée faible	Poussée produite par les moteurs électriques qui est continue et de faible puissance par opposition aux poussées ponctuelles et fortes des moteurs chimiques.
SIMPELEC	Logiciel de simulation de trajectoires développé par le Cnes.
SEP	Société Européenne de Propulsion, développe les moteurs à poussée faible de type SPT
Skybridge	Constellation de satellite pour le transfert de données, utilisant les moteurs à poussée faible.
SPT	<i>Stationnary Plasma Thrusters</i> moteur électrique à poussée faible développé par la SEP

1 Introduction

Les moteurs électro-ioniques vont bientôt être opérationnels et utilisés, aussi bien pour les satellites (p. ex. la future constellation Skybridge) que pour les sondes spatiales (Deep Space I [1]). Ils présentent de nombreux avantages : propulsion continue, gain en masse de carburant embarqué, longévité accrue. Pour les missions interplanétaires, du fait de leur accélération continue, ils permettent d'atteindre des vitesses plus élevées que les moteurs chimiques. Le gain en temps qui en résulte pourrait être mis à profit pour des missions lointaines (astéroïdes, comètes, Mercure, voire hors du système solaire voir [1]). Cependant, leur utilisation soulève de nouveaux problèmes, tant théoriques que pratiques. En effet, le fonctionnement de ces moteurs est complètement différent de celui des moteurs classiques à poudre ou ergols liquides. Par exemple, leur poussée, bien que continue, est faible et dépend de la quantité d'énergie électrique disponible. Il est donc nécessaire de repenser le calcul des trajectoires des engins qui en sont équipés. Notre étude a donc porté sur une des contraintes apparue avec l'utilisation de ces moteurs lors des transferts orbitaux : lors du passage dans l'ombre de la Terre et en l'absence de batterie, les moteurs ne sont plus alimentés par les panneaux solaires et sont donc indisponibles. Cette contrainte, bien que facilement modélisable, a des conséquences théoriques et numériques importantes. En effet, elle induit une dépendance discontinue de la commande (la poussée des moteurs) par rapport à l'état (la position de l'engin). Or ce type de dépendance ne peut être traité, de manière optimale (voir [5, 6]), par les outils classiques du contrôle optimal (principe de Pontryagin voir [12]). De plus, les outils théoriques utilisables actuellement (multiprocessus [4]) ne permettent pas de trouver numériquement des solutions optimales.

C'est pourquoi notre recherche s'est orientée vers l'encadrement du coût optimal plutôt que vers la résolution directe. A partir d'une première approche de ces problèmes, issue de l'étude menée précédemment au CNES (voir [7, 8]), nous avons construit deux problèmes dont les coûts optimaux encadrent celui du problème initial et qui peuvent être résolus par les outils classiques.

Enfin, une dernière caractéristique de la méthode que nous avons développée, est qu'elle peut être réutilisée pour traiter d'autres problèmes où la dépendance de la commande par rapport à l'état existe, par exemple : transfert orbital à poussée faible avec batteries (gestion de la charge/décharge), trajectoires interplanétaires (diminution de la quantité d'énergie solaire disponible en fonction de la distance au soleil).

2 Formulation du problème

2.1 Équation de la dynamique

Comme dans [8] nous exprimons les coordonnées du satellite avec les éléments équinoxiaux non-singuliers (voir également [2, 13]) :

$$L = v + (\omega + \Omega) \quad (1)$$

$$e_x = e \cos(\omega + \Omega) \quad (2)$$

$$e_y = e \sin(\omega + \Omega) \quad (3)$$

$$n = \sqrt{\mu/a^3} \quad (4)$$

$$h_x = \tan(i/2) \cos(\Omega) \quad (5)$$

$$h_y = \tan(i/2) \sin(\Omega) \quad (6)$$

Ces coordonnées permettent de déterminer la position et la vitesse de l'engin considéré. Nous noterons x le vecteur d'état regroupant les cinq variables : (e_x, e_y, n, h_x, h_y) . De plus, comme

la masse du satellite varie en fonction du temps, nous devons la rajouter comme 7^e variable d'état. La variation de la masse est régie par l'équation :

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{F}{g_e I_{sp}} \quad (7)$$

où F est le module de poussée, g_e l'accélération de la pesanteur au niveau de la mer et I_{sp} est l'impulsion spécifique du moteur. L'évolution des paramètres équinoxiaux est alors donnée par les équations de Gauss, que l'on peut écrire sous la forme condensée suivante :

$$\frac{dL}{dt} = g_0(L, x) + g_1(L, x)^T \frac{u}{m} \quad (8)$$

$$\frac{dx}{dt} = f(L, x) \frac{u}{m} \quad (9)$$

où

- $g_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$;
- $g_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3$;
- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n)$.
- u vecteur poussée, exprimé dans le repère orbital local $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{Z})$:

$$u = \begin{pmatrix} F_T \\ F_N \\ F_Z \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \cos(\xi) \cos(\psi) \\ \cos(\xi) \sin(\psi) \\ \sin(\xi) \end{pmatrix}$$

avec ξ l'angle entre le vecteur poussée et le plan orbital et ψ l'angle entre la projection du vecteur poussée dans le plan orbital et le vecteur \vec{T} .

Les fonctions g_0 , g_1 et f étant de classe C^1 .

La dynamique du système, notée \mathfrak{F} , est donc donnée par les équations (7),(8) et (9) :

$$\mathfrak{F}(t, L, x, m, u) = \begin{pmatrix} g_0(L, x) + g_1(L, x)^T \frac{u}{m} \\ f(L, x) \frac{u}{m} \\ -\frac{\|u\|}{g_e I_{sp}} \end{pmatrix} \quad (10)$$

2.2 Modélisation des éclipses

L'influence des éclipses se situe au niveau de la commande. En effet, les moteurs ont besoin d'énergie électrique pour fonctionner. Lors des passages en éclipse, ils ne peuvent donc plus être utilisés. Cela se traduit par une contrainte sur le module de la commande. Comme les moteurs électro-ioniques ont une poussée limitée, ce module est borné ($F \leq F_{\max}$). Pour modéliser les éclipses on considère que cette borne vaut 1 (après mise à l'échelle $\frac{1}{F_{\max}}$) hors éclipse et 0 en éclipse. Pour construire la fonction b , qui donne la valeur de la borne supérieure en fonction du temps et de l'état, nous avons besoin de connaître la position de l'ombre de la Terre ($\mathcal{C}(t)$) :

$$b(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \mathcal{C}(t) \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{C}(t) \end{cases} \quad (11)$$

Nous avons modélisé l'ombre de la Terre par un demi cylindre $\mathcal{C}(t)$, d'origine le centre de la Terre, de rayon le rayon terrestre R_T et de direction le vecteur Soleil-Terre (voir figure 1). Pour les transferts auxquels nous nous intéressons, on peut montrer que l'approximation du cône d'ombre par un cylindre est numériquement valide.

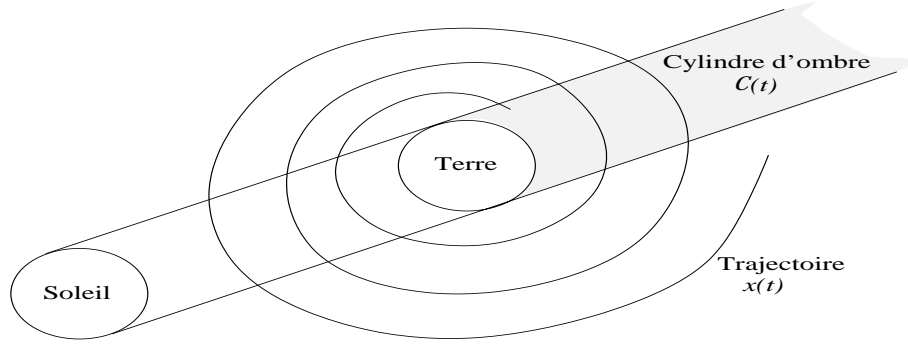


FIG. 1: Éclipses

2.3 Problème de transfert en temps minimal

Nous pouvons maintenant formuler le problème de transfert (sans rendez-vous) en temps minimal pour un satellite à propulsion électro-ionique soumis aux éclipses solaires :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\{u \in L^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \mid \|u(t)\| \leq b(t, x(t))\}} t_1 \\ \frac{dL}{dt} = g_0(L, x) + g_1(L, x)^T \frac{u}{m} \\ \frac{dx}{dt} = f(L, x) \frac{u}{m} \\ \frac{dm}{dt} = -\frac{\|u\|}{g_e I s p} \\ x(t_0) = x_0, \psi^x(t_1, x(t_1)) = 0 \\ L(t_0) = L_0, \psi^L(t_1, L(t_1)) = 0 \\ m(t_0) = m_0, m(t_1) \text{ libre} \\ t_1 \text{ libre.} \end{array} \right. \quad (12)$$

L'ensemble des commandes admissibles est donc :

$$U_{\text{ad}}(t, x) = \{u \in L^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \mid \|u(t)\| \leq b(t, x(t))\}.$$

Hypothèses (standard pour le principe du maximum de Pontryagin) :

- x est absolument continue ;
- les fonctions g_0 , g_1 et f sont de classe C^1 par rapport à t et à x ;
- ψ^x et ψ^L sont de classe C^1 par rapport à t et à x

3 Méthode de lissage

3.1 Motivation de la méthode de lissage

On ne peut appliquer le principe de Pontryagin au problème (\mathcal{P}) . En effet, l'ensemble des commandes admissibles dépend de l'état et cette dépendance est de surcroît discontinue. Une utilisation heuristique de ce principe, énoncé des conditions nécessaires sans tenir compte de la dépendance, peut conduire à des solutions sous-optimales, voire à une absence de solution (voir [5, 6] pour des contre-exemples simples).

La recherche de solutions optimales pour (\mathcal{P}) se heurte donc à deux principaux obstacles.

Le premier est théorique : actuellement, des conditions nécessaires d'optimalité numériquement exploitables font défaut. En effet, on peut établir, grâce au formalisme multiprocessus de [4] des conditions nécessaires d'optimalité s'appliquant à (\mathcal{P}) . La principale différence avec le

cas classique est la nécessité de recourir à des états adjoints, non plus absolument continus, mais à variation bornée (voir [6]). Malheureusement, on ne dispose pas de condition exploitable numériquement pour déterminer les sauts de discontinuité.

Le deuxième obstacle est numérique. Même si l'on disposait de conditions nécessaires d'optimalité, il faudrait recourir à un intégrateur de système différentiel à valeur initiale, capable de gérer un nombre variable de discontinuités. Or, à notre connaissance un tel intégrateur n'est pas disponible. Ce sont ces considérations, aussi bien théoriques que numériques qui nous ont amené à encadrer la solution optimale plutôt qu'à chercher à la calculer directement.

3.2 Description de la méthode

Nous avons vu que les méthodes classiques ne pouvaient pas s'appliquer au problème (\mathcal{P}) à cause de :

- la dépendance de l'ensemble des commandes admissibles par rapport à l'état ;
- la discontinuité de cette dépendance.

Nous allons donc construire des problèmes voisins de (\mathcal{P}) qui ne présenteront pas ces difficultés, mais qui resteront néanmoins proches de (\mathcal{P}) dans un sens que nous précisons.

Pour gérer la dépendance de la commande par rapport à l'état, nous allons déplacer la contrainte sur la borne maximale du module, de la commande à la dynamique par le changement de fonction suivant :

$$u(t) = b(t, x) \cdot \tilde{u}(t)$$

Le nouveau problème que nous considérons est donc :

$$(\tilde{\mathcal{P}}) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\{\tilde{u} \in L^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \mid \|\tilde{u}(t)\| \leq 1\}} t_1 \\ \frac{dL}{dt} = g_0(L, x) + g_1(L, x)^T \frac{b(t, x) \tilde{u}}{m} \\ \frac{dx}{dt} = f(L, x) \frac{b(t, x) \tilde{u}}{m} \\ \frac{dm}{dt} = - \frac{\|b(t, x) \tilde{u}\|^2}{g_e I_{sp}} \\ \frac{dt}{dt} = g_e I_{sp} \\ x(t_0) = x_0, \psi^x(t_1, x(t_1)) = 0 \\ L(t_0) = L_0, \psi^L(t_1, L(t_1)) = 0 \\ m(t_0) = m_0, m(t_1) \text{ libre} \\ t_1 \text{ libre.} \end{array} \right. \quad (13)$$

L'ensemble des commandes admissibles est alors :

$$\tilde{U}_{\text{ad}} = \{\tilde{u} \in L^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \mid \|\tilde{u}(t)\| \leq 1\}.$$

C'est-à-dire, un problème avec une dynamique modifiée, mais un ensemble de commandes admissibles \tilde{U}_{ad} indépendant du temps et de l'état. Montrons que (\mathcal{P}) et $(\tilde{\mathcal{P}})$ ont les mêmes solutions :

Proposition 3.1 *Les problèmes (\mathcal{P}) et $(\tilde{\mathcal{P}})$ ont les mêmes solutions.*

Démonstration. Pour démontrer ce résultat nous allons écrire (\mathcal{P}) et $(\tilde{\mathcal{P}})$ avec le formalisme des inclusions différentielles. Pour plus de lisibilité, nous notons $z = (L, x, m)$ et $\mathfrak{F}(t, z, u) = (g_0(L, x) + g_1(L, x)^T \frac{u}{m}, f(L, x) \frac{u}{m}, -\frac{\|u\|^2}{g_e I_{sp}})^T$.

$$(\mathcal{P}) \quad \min \left\{ t_1 \mid \frac{dz}{dt}(t) \in F(t, z(t)), z(t_0) = z_0, \psi^z(t_1, z(t_1)) = 0, t_1 \text{ libre} \right\}$$

où $F(t, z) = \{y \mid \exists u \in U_{\text{ad}}(t, z), y = \mathfrak{F}(t, z, u)\}$.

$$(\tilde{\mathcal{P}}) \quad \min \left\{ t_1 \mid \frac{dz}{dt}(t) \in \tilde{F}(t, z(t)), z(t_0) = z_0, \psi^z(t_1, z(t_1)) = 0, t_1 \text{ libre} \right\}$$

où $\tilde{F}(t, z) = \{\tilde{y} \mid \exists \tilde{u} \in \tilde{U}_{\text{ad}}, \tilde{y} = \mathfrak{F}(t, z, b(t, z)\tilde{u})\}$.

Soient $(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Soit $y \in F(t, z)$. Par définition, il existe u tel que $\|u\| \leq b(t, z)$ et $y = \mathfrak{F}(t, z, u)$. Soit

$$\tilde{u} = \begin{cases} 1/b(t, z)u & \text{si } b(t, z) \neq 0 \\ 0 & \text{si } b(t, z) = 0 \end{cases}$$

On constate que $\tilde{u} \in \tilde{U}_{\text{ad}}$ et on a :

$$y = \mathfrak{F}(t, z, u) = \mathfrak{F}(t, z, b(t, z)\tilde{u}).$$

Donc y appartient aussi à $\tilde{F}(t, z)$.

Réciproquement, Soit $\tilde{y} \in \tilde{F}(t, z)$, par définition, il existe \tilde{u} tel que

$$\|\tilde{u}\| \leq 1 \tag{14}$$

et

$$\tilde{y} = \mathfrak{F}(t, z, b(t, z)\tilde{u}). \tag{15}$$

Soit $u = b(t, z)\tilde{u}$. Par (14), on a $\|u\| \leq b(t, z)$ et (15) implique directement que $\tilde{y} = \mathfrak{F}(t, z, u)$. D'où $\tilde{y} \in F(t, z)$.

Nous avons donc montré que, pour tout $(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$:

$$F(t, z) = \tilde{F}(t, z).$$

La minimisation de la fonction objectif s'effectuant sur le même ensemble de trajectoires, les deux problèmes ont donc les mêmes solutions. Les deux problèmes (\mathcal{P}) et $(\tilde{\mathcal{P}})$ ayant les mêmes solutions nous les noterons dorénavant (\mathcal{P}) .

Le dernier obstacle à l'application du principe de Pontryagin est la discontinuité de la dynamique par rapport à t et à x . Cette difficulté est due à la discontinuité de b . Pour la contourner, nous allons remplacer la fonction b par une fonction C^1 qui l'approchera. Pour cela nous allons considérer deux nouveaux cylindres construits à partir de $\mathcal{C}(t)$ en modifiant le rayon. Rappelons que $\mathcal{C}(t)$ est le demi cylindre d'origine le centre de la Terre, de rayon le rayon terrestre R_T et de direction le vecteur Soleil-Terre. Notons ε un réel positif, soit $\mathcal{C}_\varepsilon^e(t)$ (resp. $\mathcal{C}_\varepsilon^i(t)$), le demi cylindre ayant les mêmes caractéristiques que $\mathcal{C}(t)$ mais de rayon $R_T + \varepsilon$ (resp. $R_T - \varepsilon$), voir figure 2. À partir de ces nouveaux demi cylindres nous définissons deux fonctions C^1 , b_i et b_e ,

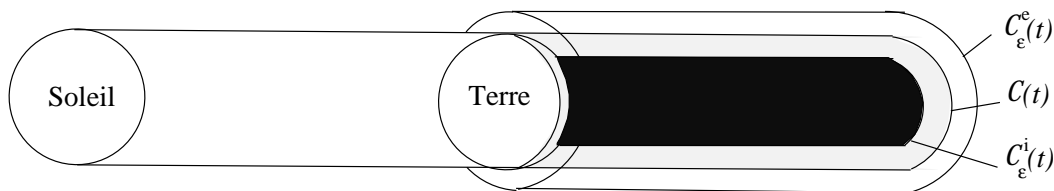


FIG. 2: Cylindres d'ombre

qui vont servir à modéliser un passage en éclipse lissé :

$$b_\varepsilon^i(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \mathcal{C}(t) \\ \in [0, 1] & \text{si } x \in \mathcal{C}(t) \setminus \mathcal{C}_\varepsilon^i(t) \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{C}_\varepsilon^i(t) \end{cases} \tag{16}$$

$$b_\varepsilon^e(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \mathcal{C}_\varepsilon^e(t) \\ \in [0, 1] & \text{si } x \in \mathcal{C}_\varepsilon^e(t) \setminus \mathcal{C}(t) \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{C}(t) \end{cases} \quad (17)$$

Le raccordement C^1 dans b_i et b_e est arbitraire. Nous avons utilisé pour la partie numérique le polynôme de degré 3, P , tel que $P(x) = 1$ et $dP(x) = 0$ pour tout x appartenant au bord de $\mathcal{C}(t)$ et $P(x) = 0$ et $dP(x) = 0$ pour tout x appartenant au bord de $\mathcal{C}_\varepsilon(t)$. Maintenant, en remplaçant la fonction discontinue b par b_i ou par b_e , nous pouvons définir les problèmes qui vont encadrer (\mathcal{P}) :

$$(\mathcal{P}_\varepsilon^i) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\{u \in L^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \mid \|u(t)\| \leq 1\}} \frac{t_1}{m} \\ \frac{dL}{dt} = g_0(L, x) + g_1(L, x)^T \frac{b_\varepsilon^i(t, x)u}{m} \\ \frac{dx}{dt} = f(L, x) \frac{b_\varepsilon^i(t, x)u}{m} \\ \frac{dm}{dt} = - \frac{\|b_\varepsilon^i(t, x)u\|}{g_e Isp} \\ x(t_0) = x_0, \psi^x(t_1, x(t_1)) = 0 \\ L(t_0) = L_0, \psi^L(t_1, L(t_1)) = 0 \\ m(t_0) = m_0, m(t_1) \text{ libre} \\ t_1 \text{ libre.} \end{array} \right. \quad (\mathcal{P}_\varepsilon^e) \left\{ \begin{array}{l} \min_{\{u \in L^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \mid \|u(t)\| \leq 1\}} \frac{t_1}{m} \\ \frac{dL}{dt} = g_0(L, x) + g_1(L, x)^T \frac{b_\varepsilon^e(t, x)u}{m} \\ \frac{dx}{dt} = f(L, x) \frac{b_\varepsilon^e(t, x)u}{m} \\ \frac{dm}{dt} = - \frac{\|b_\varepsilon^e(t, x)u\|}{g_e Isp} \\ x(t_0) = x_0, \psi^x(t_1, x(t_1)) = 0 \\ L(t_0) = L_0, \psi^L(t_1, L(t_1)) = 0 \\ m(t_0) = m_0, m(t_1) \text{ libre} \\ t_1 \text{ libre.} \end{array} \right. \quad (18)$$

Nous allons maintenant voir que les problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ et $(\mathcal{P}_\varepsilon^e)$ présentent deux avantages :

- leurs coûts optimaux encadrent le coût optimal de (\mathcal{P}) ;
- ils vérifient les hypothèses du principe de Pontryagin.

3.3 Propriétés des problèmes lissés

Soit $t_{1\varepsilon}^i$, t_1^* et $t_{1\varepsilon}^e$, respectivement, des coûts optimaux de $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$, (\mathcal{P}) et $(\mathcal{P}_\varepsilon^e)$.

On a la proposition suivante :

Proposition 3.2

$$t_{1\varepsilon}^i \leq t_1^* \leq t_{1\varepsilon}^e.$$

Démonstration. On montre, de la même manière que dans la propriété 3.1, que les problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ et $(\mathcal{P}_\varepsilon^e)$ définis en (18) sont équivalents aux problèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\{u \mid \|u(t)\| \leq b_\varepsilon^i(t, x(t))\}} \frac{t_1}{m} \\ \frac{dL}{dt} = g_0(L, x) + g_1(L, x)^T \frac{u}{m} \\ \frac{dx}{dt} = f(L, x) \frac{u}{m} \\ \frac{dm}{dt} = - \frac{\|u\|}{g_e Isp} \\ x(t_0) = x_0, \psi^x(t_1, x(t_1)) = 0 \\ L(t_0) = L_0, \psi^L(t_1, L(t_1)) = 0 \\ m(t_0) = m_0, m(t_1) \text{ libre} \\ t_1 \text{ libre.} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{\{u \mid \|u(t)\| \leq b_\varepsilon^e(t, x(t))\}} \frac{t_1}{m} \\ \frac{dL}{dt} = g_0(L, x) + g_1(L, x)^T \frac{u}{m} \\ \frac{dx}{dt} = f(L, x) \frac{u}{m} \\ \frac{dm}{dt} = - \frac{\|u\|}{g_e Isp} \\ x(t_0) = x_0, \psi^x(t_1, x(t_1)) = 0 \\ L(t_0) = L_0, \psi^L(t_1, L(t_1)) = 0 \\ m(t_0) = m_0, m(t_1) \text{ libre} \\ t_1 \text{ libre.} \end{array} \right. \quad (19)$$

Or, on a (voir figure 3 où s est l'abscisse curviligne de la trajectoire) :

$$\{u \mid \|u(t)\| \leq b_\varepsilon^e(t, x(t))\} \subset \{u \mid \|u(t)\| \leq b(t, x(t))\} \subset \{u \mid \|u(t)\| \leq b_\varepsilon^i(t, x(t))\}. \quad (20)$$

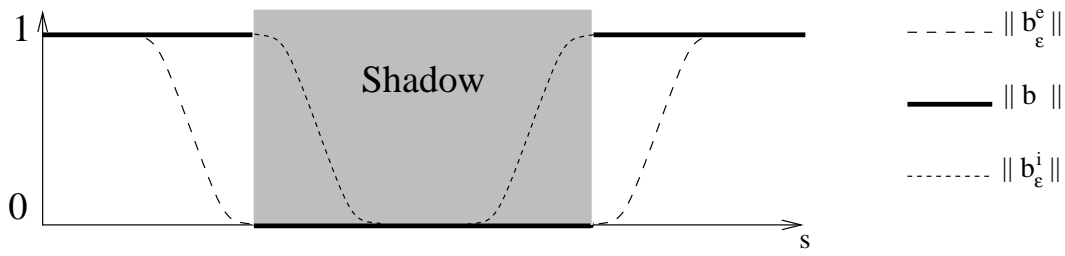


FIG. 3: Bornes sur le module des commandes lors d'un passage en éclipse

D'où le résultat. ■

Pour pouvoir appliquer le principe de Pontryagin, il ne nous reste plus qu'à vérifier que la dynamique est C^1 .

Proposition 3.3 Soit b_ε une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ dans \mathbb{R} de classe C^1 . La fonction :

$$\mathfrak{F}(t, L, x, , m, b_\varepsilon(t, x)u) = \left(g_0(L, x) + g_1(L, x)^T \frac{b_\varepsilon(t, x)u}{m}, f(L, x) \frac{b_\varepsilon(t, x)u}{m}, -\frac{\|b_\varepsilon(t, x)u\|}{g_e I_{sp}} \right)^T$$

est C^1 par rapport à t et à x .

Démonstration. Directe, par le théorème de dérivation du produit de fonctions C^1 , car

$$\mathfrak{F}(t, L, x, , m, b_\varepsilon(t, x)u) = \begin{pmatrix} g_0(L, x) + b_\varepsilon(t, x)g_1(L, x)^T \frac{u}{m} \\ b_\varepsilon(t, x)f(L, x) \frac{u}{m} \\ -b_\varepsilon(t, x) \frac{\|u\|}{g_e I_{sp}} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Nous pouvons donc maintenant appliquer le principe de Pontryagin classique (voir [3, 12]). On obtient des conditions nécessaires d'optimalité pour les problèmes $(\mathcal{P}_\varepsilon^i)$ et $(\mathcal{P}_\varepsilon^e)$. Les états adjoints issus du principe de Pontryagin, sont continus. Ainsi on peut utiliser des algorithmes de calcul classiques pour résoudre les systèmes différentiels aux deux bouts correspondants aux conditions nécessaires (nous avons utilisé la routine D02HBF de NAG [11]). Cependant, nous allons voir (section 4.2.3) que le lissage permet d'approcher les discontinuités des états adjoints du problème initial (théorie multiprocessus de [4]).

Remarque 3.1 Nous avons appliqué notre méthode de lissage au problème en temps minimal. Mais le problème à consommation minimale reprend la même dynamique : les seules différences se situent au niveau de la fonction objectif qui est alors $m(t_0) - m(t_1)$ et au niveau du temps final qui est fixé. Or, les modifications que nécessite la méthode de lissage, sont au niveau de l'ensemble des commandes admissibles et de l'équation de la dynamique. Cette méthode peut donc être utilisée pour résoudre de tels problèmes, en prenant en compte les éclipses.

4 Résultats numériques

4.1 Algorithme

Pour trouver une solution au problème aux deux bouts issu des conditions nécessaires d'optimalité, nous utilisons la routine D02HBF de NAG [11]. Cette routine est basée sur un algorithme de tir utilisant la méthode de Newton. Elle ne converge donc que si l'on est capable de lui fournir une bonne estimation des paramètres inconnus. C'est pourquoi nous avons choisi une stratégie de résolution basée sur les principes homotopiques. Nous initialisons notre programme par la solution sans contrainte d'éclipse, obtenue grâce à la méthode de moyennation développée au

CNES [8]. Du point de vue de nos problèmes lissés, cette solution correspond à un rayon terrestre nul, que nous incrémentons par la suite. Le paramètre de lissage ε peut être soit choisi constant, soit ajusté pendant l'homotopie. Le problème courant étant initialisé par la solution du précédent.

4.2 Mise à poste géostationnaire

Pour pouvoir comparer les résultats nous nous sommes intéressés aux mêmes transferts que ceux étudiés dans [8]. La méthode utilisée dans [8] repose sur une heuristique basée sur le principe de Pontryagin. Le principe y était utilisé sans tenir compte de la dépendance de l'ensemble admissible par rapport au temps et à l'état. L'heuristique donnait des trajectoires admissibles associées à des états adjoints continus. Nous allons voir que les solutions découlant de cette heuristique sont sous-optimales, ce qui confirme sur des exemples réels, les conclusions obtenues sur des exemples simples par [6].

Nous considérons donc le transfert de l'Orbite de Transfert Géostationnaire d'Ariane 4 (GTO) à l'Orbite Géostationnaire Équatoriale (GEO) :

$$\begin{array}{ll} a_0 = 24\,505,9 \text{ km} & \\ e_0 = 0,725 & \longrightarrow a_1 = 42\,165 \text{ km} \\ i_0 = 7^\circ & \longrightarrow e_1 = 0 \\ \omega_0 = 0^\circ & \longrightarrow i_1 = 0^\circ \\ \Omega_0 = 0^\circ & \end{array}$$

Ce qui donne, exprimé avec les éléments équinoxiaux :

$$\begin{array}{ll} e_{x,0} = 0,725 & e_{x,1} = 0 \\ e_{y,0} = 0 & e_{y,1} = 0 \\ n_0 = 1,646 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s} & \longrightarrow n_1 = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s} \\ h_{x,0} = 6,6116 \cdot 10^{-2} & h_{x,1} = 0 \\ h_{y,0} = 0 & h_{y,1} = 0 \end{array}$$

Le moteur considéré est le SPT 200 en cours de développement par la SEP [9] (voir aussi [10], pour le SPT140), dont les caractéristiques sont :

$$\begin{array}{l} F = 0,35 \text{ N} \\ I_{sp} = 2000 \text{ s} \end{array}$$

Les autres constantes du problème sont :

- la masse initiale du satellite $m_0 = 2000 \text{ kg}$;
- la constante d'attraction de la Terre $\mu = 398\,600,47 \text{ km}^3/\text{s}^2$;
- l'accélération de la pesanteur à l'équateur $g_e = 9,81 \text{ m/s}^2$.

4.2.1 Sans éclipse

Si on ne prend pas en compte les éclipses, la stratégie en temps minimum conduit à :

$$\text{sans éclipse : } \begin{cases} \Delta t = t_1 - t_0 = 137,5 \text{ jours} \\ \Delta m = m_0 - m(t_1) = 212 \text{ kg de carburant} \\ \Delta L = L(t_1) - L_0 = 189 \times 360^\circ \end{cases} \quad (21)$$

La figure 4 donne l'évolution de l'orbite en coordonnées cartésiennes dans le repère géocentrique inertiel. On voit que la stratégie trouvée est de type « super synchrone ». C'est-à-dire que le transfert se fait en deux phases : on augmente d'abord le demi-grand axe et on dépasse l'orbite géostationnaire, puis on circularise l'orbite.

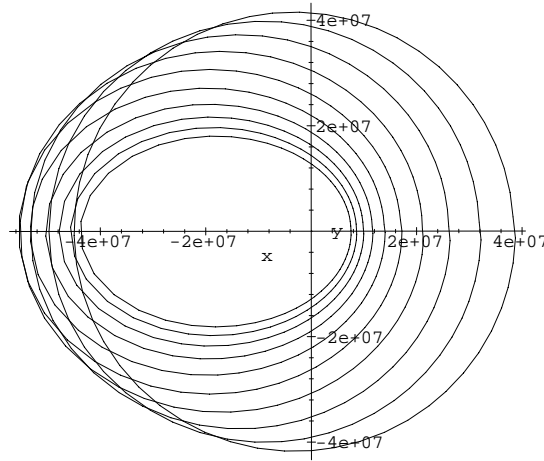


FIG. 4: Trajectoire sans contrainte d'éclipse

4.2.2 Éclipse : lancement le 1^{er} janvier 1997

Pour cette date de lancement, nous avons calculé un encadrement du temps minimal avec un paramètre de lissage ε égal au $1/32$ du rayon terrestre. Ce paramètre est choisi pour que la commande sur cet exemple soit pratiquement discontinue : seulement quelques points sont calculés dans la zone de lissage. Ainsi on peut approcher les créneaux de la commande simulant les lois de poussé ON/OFF des moteurs électro-ioniques. Il convient d'adapter le paramètre de lissage au transfert considéré pour s'approcher le plus possible de la commande réelle. Nous avons obtenu :

$$\text{lissage intérieur : } \begin{cases} \Delta t & = 141,9 \text{ jours} \\ \Delta m & = 213,5 \text{ kg de carburant} \\ \Delta L & = 197,0 \times 360^\circ \end{cases} \quad (22)$$

$$\text{lissage extérieur : } \begin{cases} \Delta t & = 142,3 \text{ jours} \\ \Delta m & = 213,6 \text{ kg de carburant} \\ \Delta L & = 197,1 \times 360^\circ \end{cases} \quad (23)$$

L'encadrement du temps minimal est très étroit (moins d'un jour). On peut donc considérer que les solutions lissées donnent une bonne approximation de la solution. Ces résultats sont de même ordre que ceux de S. Geffroy dans [8] :

$$\text{heuristique : } \begin{cases} \Delta t & = 143,5 \text{ jours} \\ \Delta m & = 221,2 \text{ kg de carburant} \\ \Delta L & = 198,8 \times 360^\circ \end{cases} \quad (24)$$

Les résultats (24) avaient été obtenus en utilisant l'heuristique basée sur le principe de Pontryagin et sont, pour cette date de lancement, presque optimaux.

La figure 5 donne le module de la commande, où l'on voit deux périodes pendant lesquelles le satellite subit les éclipses. Du point de vue des directions de poussée, la stratégie est similaire au cas sans éclipse (en pointillé sur les zooms) mais décalée dans le temps. Les créneaux que l'on voit sur les agrandissements correspondent aux passages en éclipses.

Pour finir, on voit sur la figure 6, que la stratégie est de type super synchrone (voir le rayon d'apogée), comme dans le cas sans éclipse.

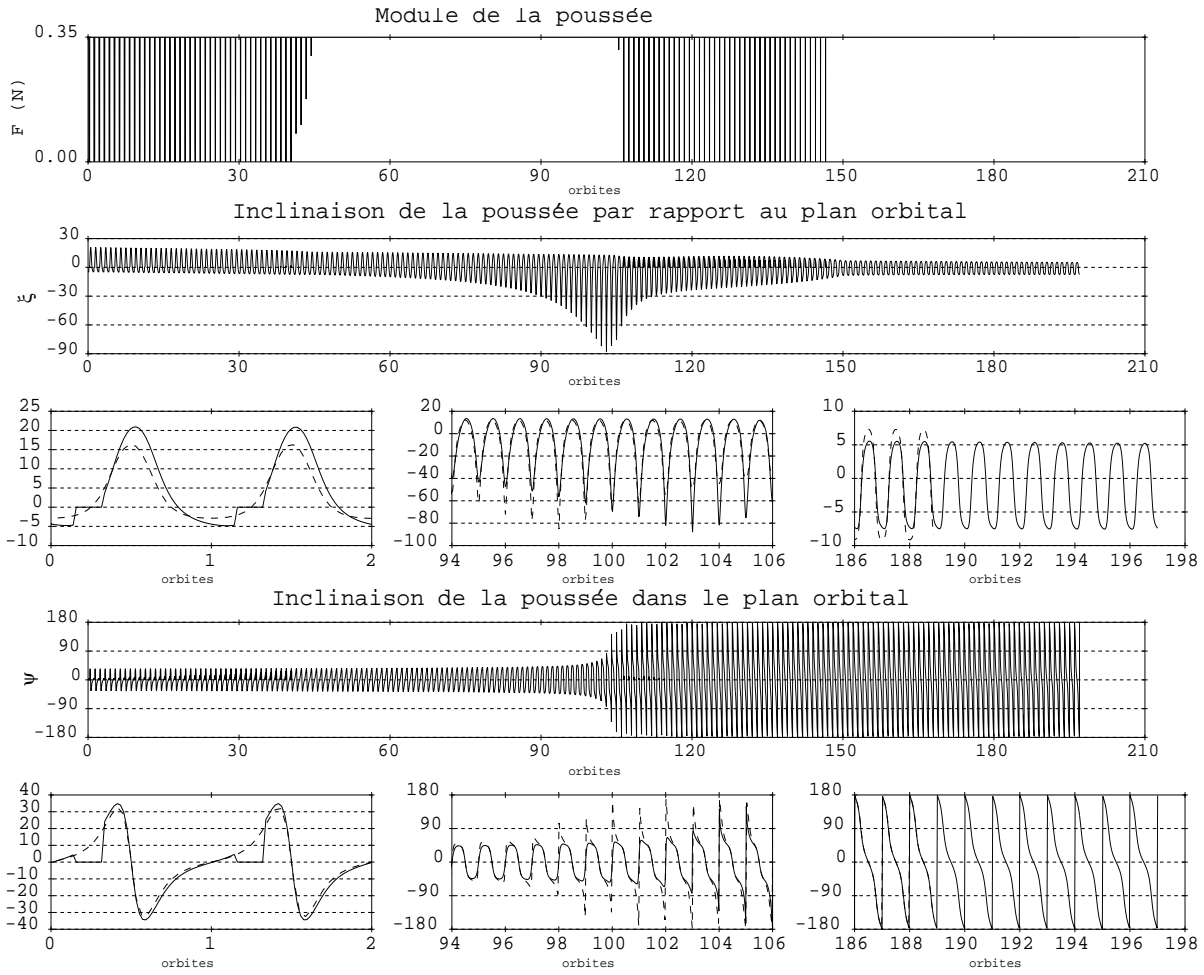


FIG. 5: Commande, lancement le 01 01 1997

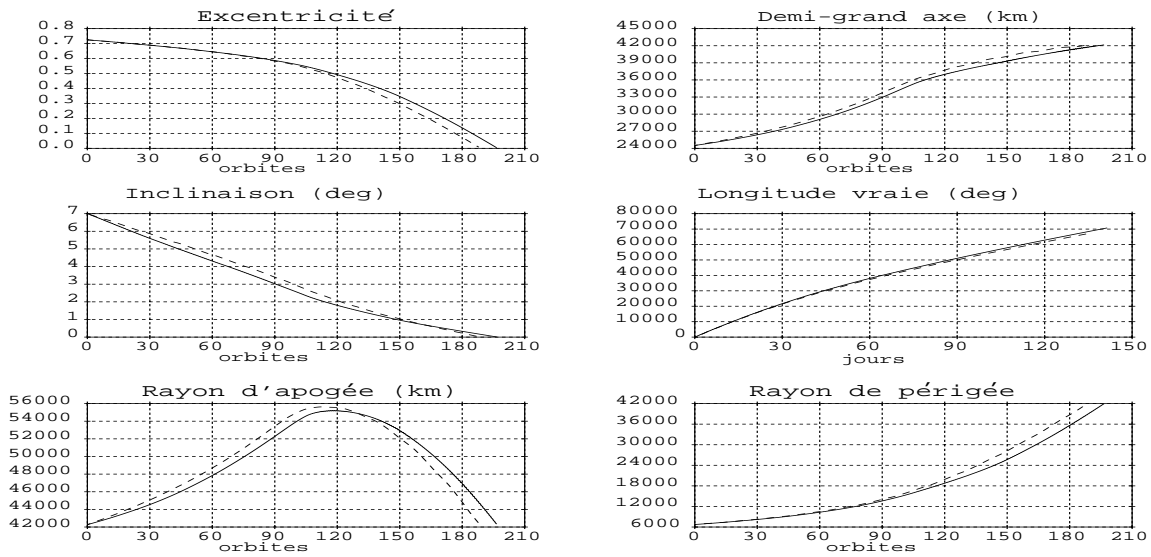


FIG. 6: États, lancement le 01 01 1997

4.2.3 Éclipse : lancement le 1^{er} avril 1997.

De même que pour la date précédente le paramètre de lissage choisi est égal au 1/32 du rayon terrestre. Nous obtenons :

$$\text{lissage intérieur : } \begin{cases} \Delta t = 140,9 \text{ jours} \\ \Delta m = 213,2 \text{ kg de carburant} \\ \Delta L = 189,6 \times 360^\circ \end{cases} \quad (25)$$

$$\text{lissage extérieur : } \begin{cases} \Delta t = 141,2 \text{ jours} \\ \Delta m = 213,4 \text{ kg de carburant} \\ \Delta L = 189,7 \times 360^\circ \end{cases} \quad (26)$$

Comme précédemment, l'encadrement de la solution est très étroit. Par contre, le gain par rapport à la solution heuristique (27) est considérable :

$$\text{heuristique : } \begin{cases} \Delta t = 238,3 \text{ jours} \\ \Delta m = 367,3 \text{ kg de carburant} \\ \Delta L = 628,1 \times 360^\circ \end{cases} \quad (27)$$

En effet, le gain entre (25) et (27) est de 97,4 jours, 154,1 kg et 438,4 révolutions. Cela provient de la stratégie lissée qui évite rapidement (à partir du 22^e jour) les éclipses (voir figure 7). Au contraire de la solution heuristique qui les subit pendant presque tout le transfert. De même que pour le tir du 1^{er} janvier, on constate que le temps optimal obtenu par la méthode lissée est proche de celui obtenu sans la contrainte d'éclipse.

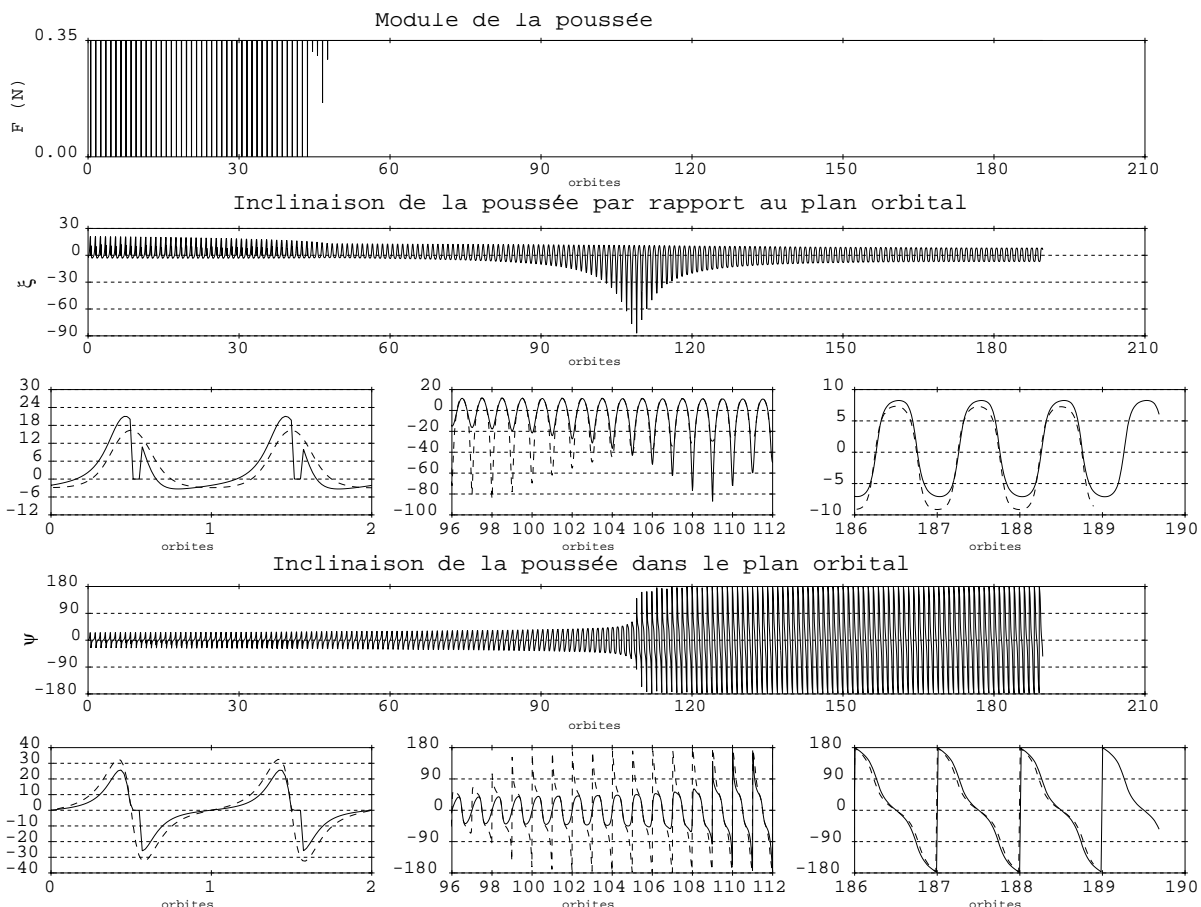


FIG. 7: Commande, lancement le 01 04 1997

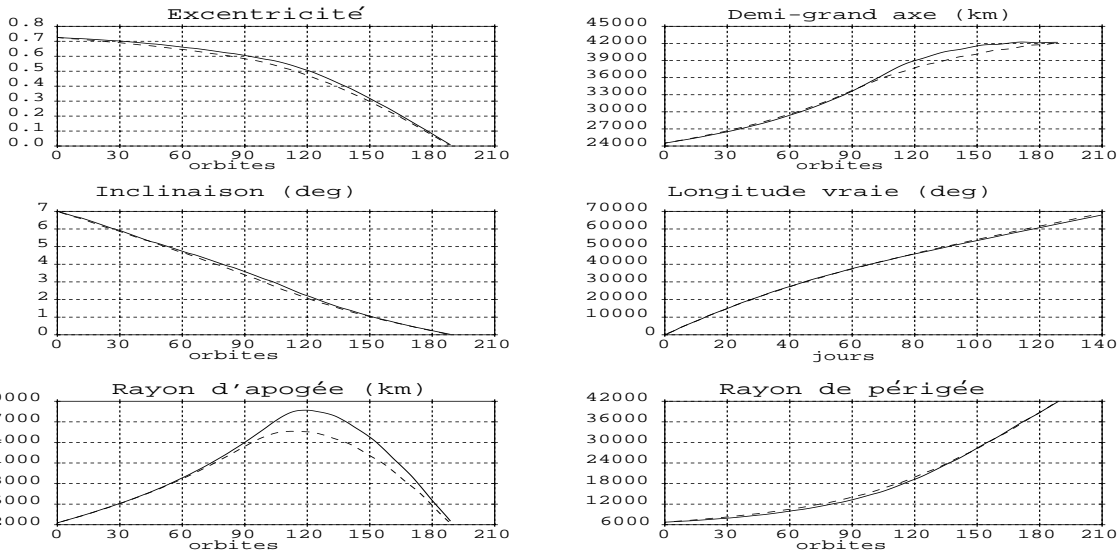


FIG. 8: États, lancement le 01 04 1997

La figure 8 donne l'évolution des états, avec en pointillés les états sans contrainte d'éclipse. On voit que la stratégie est encore de type super synchrone, contrairement à la stratégie issue de l'heuristique qui était sub-synchrone (circularisation de l'orbite, puis augmentation du rayon).

Cet exemple met en lumière la capacité de la méthode de lissage à approcher la solution optimale du problème discontinu. Cette capacité provient de l'approximation des discontinuités des états adjoints. Sur la figure 9 est représenté l'état adjoint au mouvement moyen pendant les 24 premières heures, les trait verticaux délimitant les éclipses. On voit que pour cette valeur faible du paramètre de lissage, l'état adjoint est pratiquement discontinu à chaque entrée ou sortie d'une zone d'ombre. La technique de lissage permet donc, quand ε tend vers 0, d'obtenir des états adjoints continus proches des états adjoints discontinus, qui sont une solution du problème initial (voir [6]).

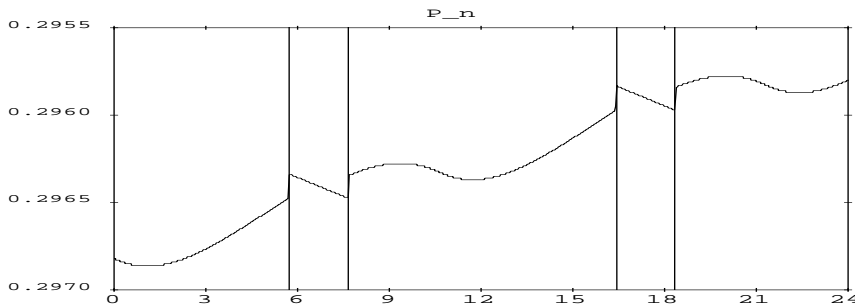


FIG. 9: État adjoint associé au mouvement moyen

4.3 Influence des éclipses

Nous étudions ici l'influence des éclipses sur la durée du transfert orbital décrit dans la section précédente. Pour cela, nous avons calculé avec la méthode de lissage intérieur ($\varepsilon = R_T/32$), les temps de transfert pour des tirs effectués tous les 15 jours de l'année 1997. Pour ces calculs et à part pour la première date (01/01/1997), nous n'avons pas utilisé d'homotopie sur le lissage : nous avons initialisé le calcul courant avec les résultats du tir précédent. Il en résulte un gain en temps de calcul. Le premier résultat est que notre méthode est robuste : nous avons pu

couvrir toute l'année et donc des situations très différentes (ombre près de l'apogée ou non) sans problème. Le deuxième résultat est que, quelque soit la date choisie, l'influence des éclipses est modérée : entre 1,3 et 6 % d'allongement du temps de transfert par rapport au cas sans contrainte d'éclipse (voir figure 10). Cependant, si les temps de transfert ne sont pas beaucoup modifiés par la prise en compte des éclipses, ce n'est pas le cas des trajectoires qui peuvent être très différentes (comme on va le voir dans la section suivante). Donc même si l'influence des éclipses peut paraître négligeable, il est crucial de les prendre en compte lors du processus d'optimisation (voir exemple 4.2.3).

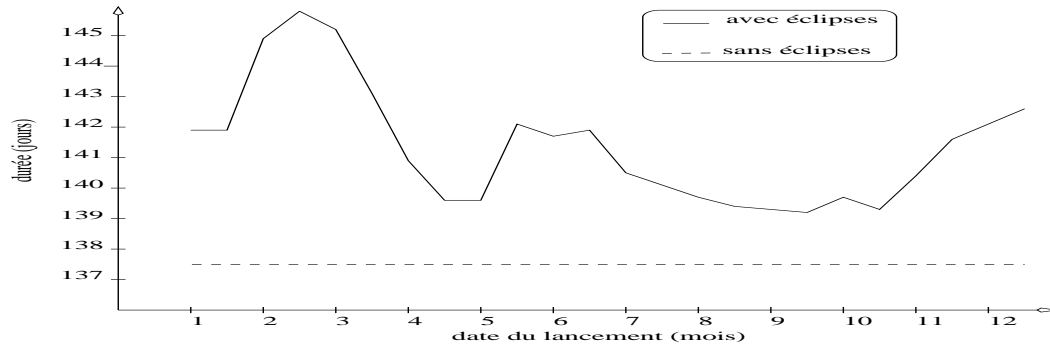


FIG. 10: Influence de la date du tir sur la durée du transfert

4.4 Autre transfert orbital.

Nous nous intéressons ici à un transfert qui permet de souligner la capacité de la solution lissée à éviter le plus possible les zones d'éclipses. Les paramètres orbitaux sont les suivants :

$$\begin{array}{rcl}
 a_0 & = & 24\,505,9 \text{ km} \\
 e_0 & = & 0,725 \\
 i_0 & = & 7^\circ \\
 \omega_0 & = & 180^\circ \\
 \Omega_0 & = & 180^\circ
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad
 \begin{array}{rcl}
 a_1 & = & 42\,165 \text{ km} \\
 e_1 & = & 0 \\
 i_1 & = & 20^\circ
 \end{array}$$

Nous avons en fait modifié le transfert de la section 4.2 de manière à ce que la trajectoire soit soumise aux éclipses pendant la majeure partie du transfert (voir la localisation temporelle des éclipses sur la figure 11). Si l'on ne prend pas en compte la contrainte d'éclipse on obtient :

$$\text{sans éclipse : } \begin{cases} \Delta t & = & 161,1 \text{ jours} \\ \Delta m & = & 248,5 \text{ kg de carburant} \\ \Delta L & = & 217,4 \times 360^\circ \end{cases} \quad (28)$$

4.4.1 Lancement le 01 02 1997

Pour cette date, nous avons localisé les passages en éclipse lors du transfert sans contrainte. Sur la figure 11, chaque barre verticale correspond à une éclipse. On voit que le satellite subit les éclipses pendant la plus grande partie du transfert.

Calculons maintenant la solution du problème lissé. Pour un paramètre de lissage intérieur égal au 1/32 du rayon terrestre, nous obtenons :

$$\text{lissage intérieur : } \begin{cases} \Delta t & = & 168,7 \text{ jours} \\ \Delta m & = & 248,4 \text{ kg de carburant} \\ \Delta L & = & 217,2 \times 360^\circ \end{cases} \quad (29)$$

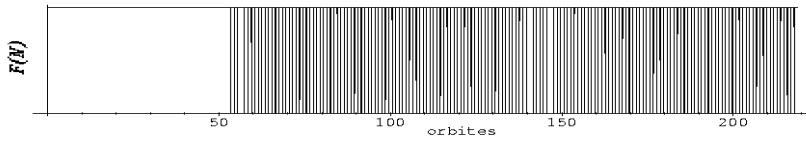


FIG. 11: Localisation des éclipses

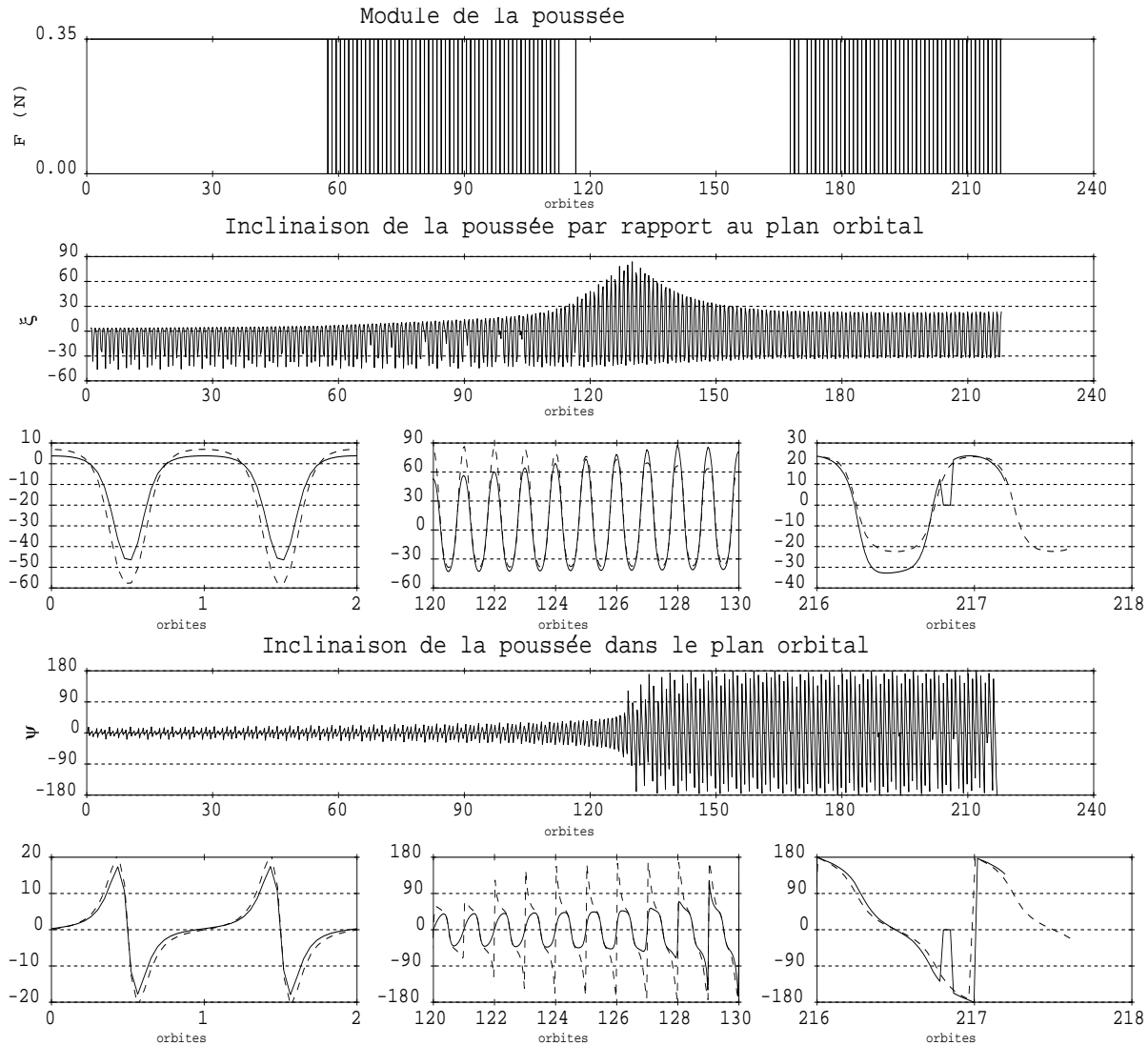


FIG. 12: Commande, lancement le 01 02 1997

Regardons maintenant le module de la commande représenté sur la figure 11. On voit que l'on a réussi à éviter plus d'un tiers des passages en zone d'ombre par rapport au transfert où la contrainte d'éclipse n'était pas prise en compte (voir figure 11). Ensuite, sur la figure 13 nous donnons les différents états (en plein avec contrainte d'éclipse et en pointillé sans contrainte).

Pour finir nous donnons sur la figure 14 les différences entre les états avec contrainte et sans contrainte d'éclipse. On constate que si la stratégie est toujours super synchrone, le dépassement de l'altitude géostationnaire est plus marqué dans le cas avec contrainte et il y a aussi des

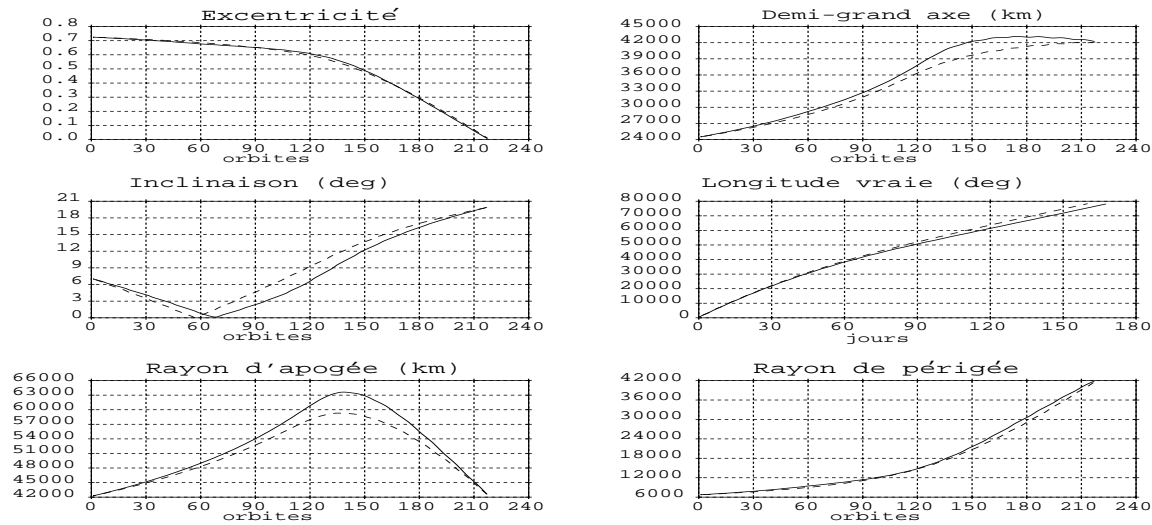


FIG. 13: États, lancement le 01 02 1997

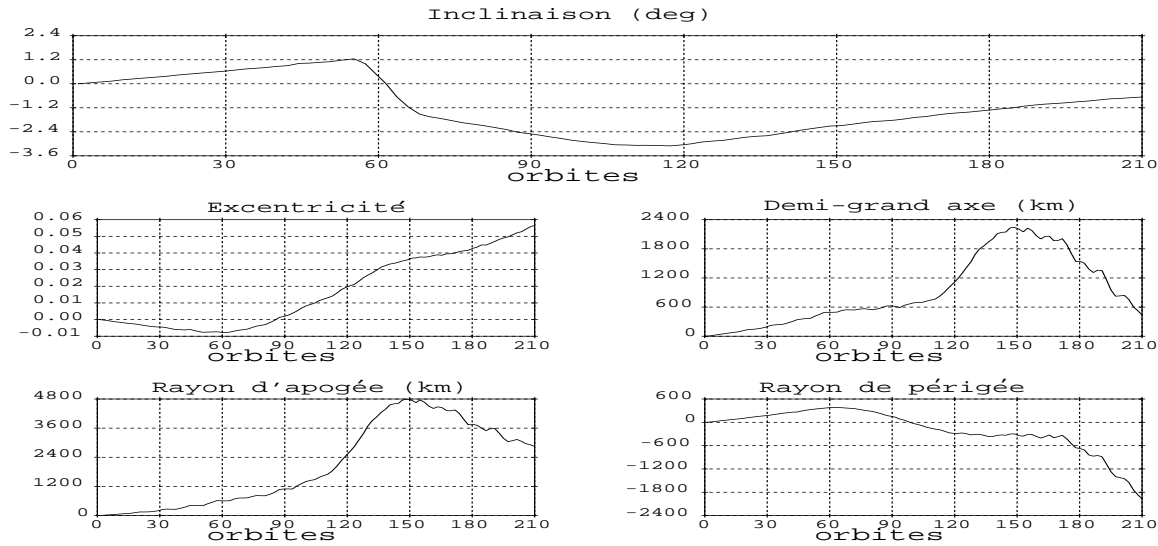


FIG. 14: Différence entre états, lancement le 01 02 1997

différences très nettes au niveau de l'excentricité et de l'inclinaison. On voit donc que les états ont été modifiés de manière à éviter les zones d'ombre. Les différences ne s'annulent pas en fin de comparaison, car le transfert avec contrainte est plus long que celui sans contrainte.

4.5 Vérification par simulation

Afin de valider nos résultats numériques, nous avons simulé la trajectoire réelle à partir de la commande. Pour cela, nous avons utilisé le logiciel SIMPELEC développé au CNES. Nous avons fourni en entrée la commande donnée par notre code ; SIMPELEC a ensuite simulé la trajectoire à partir des équations du mouvement. Les différences constatées en fin de transfert entre la trajectoire calculée par notre code et celle simulée ne dépassent pas 0,4 %.

5 Conclusion

La méthode de lissage que nous avons développée, permet d'obtenir un encadrement très précis de la solution optimale du problème (\mathcal{P}) (moins d'un jour d'écart sur le temps optimal sur les exemples traités). De plus, on constate qu'avec cette méthode, la date de mise en orbite n'a pas une grande influence sur la durée du transfert (moins de 6% pour tous les exemples traités). La possibilité d'atteindre les solutions optimales qui sont relativement proches de la solution sans éclipse, résulte de la prise en compte directe des éclipses dans les conditions nécessaires d'optimalité, par le biais du lissage. Ainsi, nous avons montré (voir section 4.4) que la méthode parvient à éviter le plus possible les passages en éclipse. Tout ceci constitue un réel progrès par rapport à l'existant. Nous avons appliqué cette méthode au transfert orbital sous contrainte d'éclipses. Cependant, sa principale caractéristique est la capacité à traiter des dépendances de la commande par rapport au temps et à l'état. Or, avec le développement des moteurs à poussée faible et leurs utilisations opérationnelles (Skybridge, Deep Space I [1]) cette dépendance se retrouve aussi bien pour des problèmes de transfert avec d'autres contraintes (utilisation d'une batterie pour pallier les éclipses : gestion de la charge/décharge), que pour des problèmes interplanétaires (diminution de la quantité d'énergie solaire disponible en fonction de la distance au soleil). Ainsi, cette méthode peut être réutilisée pour de nombreux autres problèmes.

Références

- [1] Deep Space 1. <http://nmp.jpl.nasa.gov/ds1/>. Description of the mission and of the technology.
- [2] P. J. Cefola. equinoctial orbit elements - application to artificial satellit orbits. In *AIAA72-937*, Palo Alto, Ca., 1972. AIAA/AAS Astrodynamics Conference.
- [3] L. Cesari. *Optimization Theory and Applications, Problems with Ordinary Differential Equations*. Number 17 in Springer-Verlag, Applications of Mathematics. Springer Verlag, 1983.
- [4] F.H. Clarke and R. B. Vinter. Optimal multiprocesses. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 27(5) :1072–1091, 1989.
- [5] R. Epenoy. Les problèmes de contrôle optimal avec contraintes de la forme $u(t) \in U(t, x(t))$ – échec de l'application naïve du principe du maximum de Pontryagin. Technical Report DGA/T/TI/MS/MN/98-014, CNES, 1998.
- [6] Ch. Ferrier. étude de la commande optimale d'un système soumis à une contrainte de type éclipse solaire. Technical Report T/TS/TI/MS/MN/98-031, Centre National d'Etudes Spatiales, 1998.
- [7] S. Geffroy. *Généralisation des techniques de moyennation en contrôle optimal-Application aux problèmes de transfert et de rendez-vous orbitaux à poussée faible*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1997. Thèse préparée dans la Division Mathématiques Spatiales du CNES.
- [8] S. Geffroy and R. Epenoy. Optimal low-thrust transfers with constraints - generalization of averaging technics. *Acta Astronautica*, 41(3) :133–149, 1997.
- [9] P. Langereux. La propulsion électrique révolutionne le contrôle d'attitude des satellites. *Air et Cosmos*, 1993.
- [10] D. Manzella, C. Sarmiento, J. Sankovic, and T. Haag. Performance Evaluation of the SPT140. In *25th International Electric Propulsion Conference*, pages 24–27, Cleveland, Ohio, August 1997.

- [11] The Numerical Algorithm Group Inc. *NAG Fortran Library Manual Mark 16*, 1993.
- [12] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, and E.F. Mishenko. *The Mathematical Theory of Optimal Process*. John Wiley, 1962. K.N. Trirogoff, Transl.
- [13] E. A. Roth. The gaussian form of the variation-of-parameters equations formulation in equinoctial elements - application air-drag and radiation pressure. In *35th Congress of the International Astronautical Federation*, Lausanne, Switz, 1984.